13. 2. 2026

PVA EXPO PRAHA

Řešení

fykos.cz

fyziklani.cz

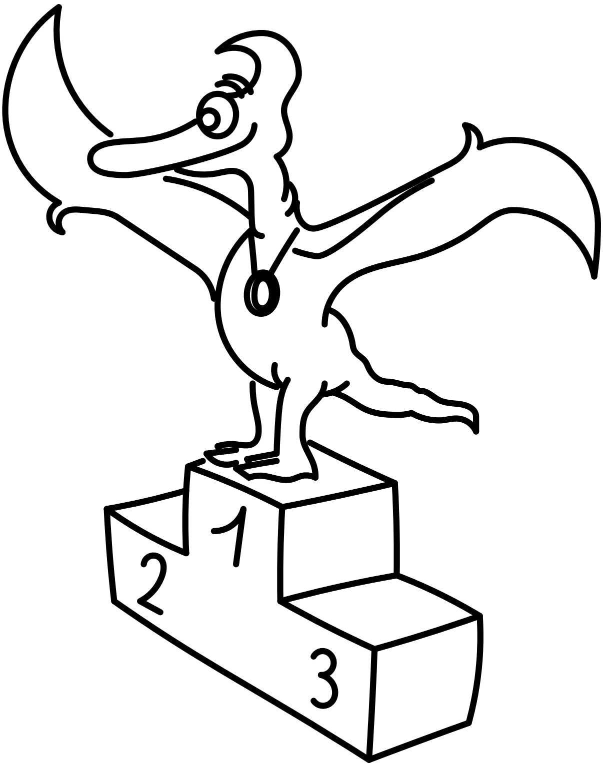
/fykos

@fykosak

Fyziklani2026

Řešení úloh

Fyziklani2026



Úloha AA ... letní drink

Mějme válcovou skleničku s vnitřním poloměrem $R = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ *a s kostkou ledu o délce strany* $a = 2{,}5\,\mathrm{cm}$*, která plave na hladině. Výška hladiny i s plovoucí kostkou je* $h = 10\,\mathrm{cm}$*. O kolik centimetrů se výška hladiny ve skleničce změní, když kostka úplně roztaje? Pokud hladina stoupne, uveďte kladné číslo, pokud klesne, tak záporné.*

Vlado měl pocit, že mu přišla limonáda s víc ledem než vodou. Mýlil se.

Rozmery kocky sú výrazne menšie ako výška hladiny, kocka bude teda voľne plávať na hladine. Plávajúca kocka sa preto nachádza v rovnovážnej polohe, teda výslednica síl na ňu pôsobiacich je nulová. Podľa Archimedovho zákona platí

$$mg = \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{p} g \quad \Rightarrow \quad m = \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{p} \,,$$

kde m je hmotnosť kocky ľadu a V_p je objem jej ponorenej časti. Vložením kocky do pohára s vodou sa jej hladina zdvihla o

$$\Delta h_0 = \frac{V_\mathrm{p}}{\pi R^2} \,,$$

z čoho vyplýva, že výška hladiny vody pred vložením kocky ľadu bola $h_0 = h - \Delta h_0$.

Pri roztápaní kocky sa zachováva jej hmotnosť, kvôli čomu výška hladiny narastie o

$$\Delta h_1 = \frac{\frac{m}{\rho_\mathrm{v}}}{\pi R^2} = \frac{\frac{\rho_\mathrm{v} V_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{v}}}{\pi R^2} = \frac{V_\mathrm{p}}{\pi R^2} = \Delta h_0 \,.$$

Výška hladiny po roztopení kocky bude

$$h_1 = h_0 + \Delta h_1 = h - \Delta h_0 + \Delta h_0 = h \,.$$

Výška hladiny sa teda zjavne nezmení ($\Delta h = 0$). Tento výsledok platí vo všeobecnosti pre ľubovoľný tvar „kocky“ ľadu, keďže sme pri výpočte nevyužili žiadne špecifické geometrické vlastnosti spojené s kockou.

Vladimír Slanina
`vladimir.slanina@fykos.cz`

Úloha AB ... Markova jízda

Ulicí se řítí závratnou rychlostí vyhlídková tramvaj T3 Coupé *vybavená turbomotory. Za páčkami nesedí nikdo jiný, než on. Muž. Mýtus. Legenda. Marek Milička. Každou sekundou se blíží k rozpadlému mostu přes Vltavu. Řeka má šířku* $d = 200\,\mathrm{m}$*. Zbytky mostu jsou tvořeny nájezdy na obou březích, které se zemí svírají úhel* $\vartheta = 10^\circ$*. Marek zrychlí a… řeku s tramvají přeskočí a úspěšně dopadne na nájezd na druhém břehu. Jakou rychlostí se Markova tramvaj pohybovala těsně před skokem?*

I takové věci se dají zažít na FYKOSím soustředění.

Označme si rychlost, kterou se tramvaj na počátku pohybuje jako v. Protože se pohybuje po nájezdu, svírá vektor rychlosti s horizontální rovinou také úhel ϑ. Pro horizontální (x-ovou) a vertikální (y-ovou) složku rychlosti tak platí

$$v_x = v\cos\vartheta \,,$$
$$v_y = v\sin\vartheta \,.$$

Označme si čas, za který tramvaj řeku přeskočí jako t. Víme tak, že platí

$$vt\cos\vartheta = d\,.$$

Navíc víme, že ve vertikálním směru bude první polovinu času tramvaj zpomalována tíhovým zrychlením g až dosáhne nulové vertikální rychlosti, načež jím bude zase zrychlována až na druhé straně dopadne se stejnou vertikální rychlostí, ale opačného směru. Platí tak

$$v\sin\vartheta - g\frac{t}{2} = 0\,.$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit čas t a dosadit jej do předchozí rovnice

$$t = 2\frac{v}{g}\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad 2\sin\vartheta\cos\vartheta\frac{v^2}{g} = d\,.$$

Následným využitím vztahu $\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta$ a úpravou pak pro rychlost v dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\vartheta}} \doteq 75{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 272{,}7\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha AC ... nesuď rybu podle běhání

Zajíc s rybou si chtějí dát spravedlivý závod, při kterém by zajíc běžel a ryba plavala. Vystartují najednou a urazí vzdálenost $s = 500\,\mathrm{m}$ po proudu řeky, potom se otočí a vrátí se zpátky na začátek. To ale stále není úplně spravedlivé. Řeka má proud o rychlosti $u = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Zajíc běží stejnou rychlostí, jako plave ryba, a to $v = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jaký bude rozdíl v jejich časech? Uveďte kladný výsledek, pokud první doběhne zajíc a záporný, pokud první doplave ryba.

Lego učil o pohybu v prostředí.

Zajacov čas bude jednoducho $2s/v = 100\,\mathrm{s}$. Ryba bude mať v smere po prúde rýchlosť $v + u$, a teda čas tejto polovice trasy $s/(v + u) \doteq 45{,}45\,\mathrm{s}$. Proti prúdu bude jej rýchlosť zase $v - u$, a čas teda $s/(v - u) \doteq 55{,}55\,\mathrm{s}$. Spolu to bude teda rybe trvať približne $101{,}0\,\mathrm{s}$, čiže dopláva o $1{,}0\,\mathrm{s}$ neskôr ako zajac. Máme zadať kladný výsledok, ak prvý dobehne zajac, odpoveďou preto bude $1{,}0\,\mathrm{s}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha AD ... průměrování úhlů

Legovi se zdál nepříjemný sen: ocitl se uprostřed stáda běžících koní. Usoudil, že nejmenší riziko zranění má, pokud poběží přibližně stejným směrem jako oni. Proto chtěl určit jejich průměrný směr. Zvolil referenční vektor a změřil vůči němu směry několika okolních koní, čímž získal úhly $1^\circ, 5^\circ, 2^\circ, 358^\circ, 357^\circ$. Pod jakým úhlem vůči tomuto vektoru má Lego běžet, aby to byl průměrný směr koní v jeho okolí?

Lego si v rámci svého výzkumu četl o flockingu.

Ak by sme spravili aritmetický priemer, dostaneme: $(1^\circ + 5^\circ + 2^\circ + 358^\circ + 357^\circ)/5 = 144{,}6^\circ$. Tento výsledok avšak nedáva zmysel, keďže všetky kone bežia približne v smere nášho vektora a nám ako priemer vyšiel smer $144{,}6^\circ$. Je to samozrejme spôsobené skokom v nule (kde je zároveň uhol 360°).

Tento problém môžeme vyriešiť tak, že tento skok odstránime a budeme brať uhly z intervalu $(-180^\circ, 180^\circ)$. Potom dostaneme priemer $(1^\circ + 5^\circ + 2^\circ + (-2^\circ) + (-3^\circ))/5 = 0{,}6^\circ$, čo už je uveriteľná hodnota (a pre potreby tejto úlohy postačujúca).

Postup z predchádzajúceho odseku funguje iba v prípade, že smery sú naozaj takto blízko pri sebe. Keby sme mali napríklad výrazne väčší súbor údajov pokrývajúci rôzne smery rovnomernejšie, už by sme to nemohli takto jednoducho spriemerovať. V takýchto prípadoch sa používa nasledovný postup: spočítame priemerný sínus a priemerný kosínus uhlov (tieto funkcie sú spojité, nemajú žiadne skoky) a výsledný priemerný uhol dostaneme ako arkustangens ich pomeru. V našom prípade to vyzerá nasledovne:

$$\operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{5}(\sin 1^\circ + \sin 5^\circ + \sin 2^\circ + \sin 358^\circ + \sin 357^\circ)}{\frac{1}{5}(\cos 1^\circ + \cos 5^\circ + \cos 2^\circ + \cos 358^\circ + \cos 357^\circ)} \doteq 0{,}6^\circ\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha AE ... vive la révolution

Gilotina má čepel o hmotnosti m, která při pádu klouže ve žlábcích dvou svislých protilehlých trámů. Koeficient tření mezi čepelí a trámy je k a normálová síla mezi každým trámem a čepelí je F. Pod čepelí je umístěn meloun, k jehož rozseknutí je zapotřebí energie E. Určete minimální výšku gilotiny při započítání ztrát energie třením.

Petr studoval historii Francie a sledoval demonstraci gilotiny.

Podľa zadania sa všetka energia vynaložená na brzdenie čepele trením premení na teplo. Celková potrebná počiatočná potenciálna energia sa bude preto rovnať súčtu požadovanej kinetickej energie E a práce vykonanej trením. Túto prácu spočítame ako súčet trecích síl kF na oboch trámoch prenásobených nejakou výškou h, po ktorej budú sily pôsobiť. Celkovo dostávame $2kFh$. Poznamenajme, že normálová sila F pôsobí v každej z dvoch drážok na čepeľ z dvoch protiľahlých strán. Potom výsledným prefaktorom je iba 2, a nie 4, keďže trecia sila nezávisí na veľkosti kontaktnej plochy. Teraz nám stačí si potrebnú potenciálnu energiu čepele mgh zapísať do rovnice

$$\begin{aligned} mgh &= E + 2kFh\,,\\ (mg - 2kF)\,h &= E\,,\\ h &= \frac{E}{mg - 2kF}\,. \end{aligned}$$

Gilotína z tohto dôvodu musí byť vysoká aspoň $h = E/(mg - 2kF)$.

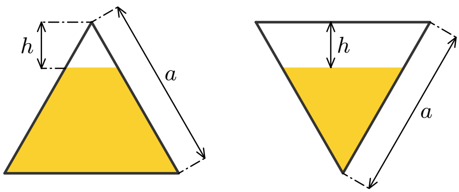
Jakub Kliment
jakub.kliment@fykos.cz

Úloha AF ... dip na nachos

Máme hromadu nachos a dipu. Nachos mají tvar rovnostranného trojúhelníku s délkou hrany $a = 5{,}2\,\mathrm{cm}$. O kolik procent víc dipu spotřebujeme, když budeme namáčet nachos do dipu tak, že je držíme za vrchol, oproti tomu, kdy je budeme držet za střed strany? V obou případech držíme nachos tak, abychom si neušpinili prsty, a necháme $h = 0{,}62\,\mathrm{cm}$ nenamočenou. Předpokládejte, že se nabírá konstantní tloušťka dipu. Tloušťku nachos zanedbejte.

Karel přemýšlel nad tím, co všechno nesmí jíst.

Porovnávame dva prípady – v prvom prípade držíme trojuholník (nachos) zvislo za jeho vrchol, v druhom ho držíme za stred jeho strany. V oboch prípadoch budeme chcieť spočítať obsah časti namočenej do dipu.



Obrázek 1: Geometria nachos po namočení do dipu v prvom (vľavo) a druhom (vpravo) prípade.

Do dipu sa samozrejme namáča z oboch strán, avšak vo výsledku nás bude zaujímať iba pomer daných obsahov, takže sa obmedzíme na jednu stranu trojuholníka. Pripomeňme si, že výška rovnostranného trojuholníka so stranou a je $a\sin(60^\circ) = a\sqrt{3}/2$, takže jeho obsah bude $a\sqrt{3}/2 \cdot a/2 = a^2\sqrt{3}/4$.

V prvom prípade bude do dipu namočený celý trojuholník (so stranou a) až na časť tvaru menšieho rovnostranného trojuholníka s výškou h, teda so stranou $2h/\sqrt{3}$. Obsah namočenej časti bude preto

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}h^2\,.$$

V druhom prípade je do dipu namočená naopak iba časť tvaru rovnostranného trojuholníka, tentokrát s výškou dĺžky $a\sqrt{3}/2 - h$. Jeho strana bude mať preto dĺžku $2(a\sqrt{3}/2 - h)/\sqrt{3}$, potom príslušný obsah bude

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - h\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - ah + \frac{\sqrt{3}}{3}h^2\,.$$

Keďže nás zaujíma, o koľko percent viac dipu spotrebujeme v prvom prípade, budeme musieť od pomeru S_1/S_2 odpočítať $100\,\%$. Potom hľadaným výrazom bude pomer

$$\frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{ah - 2\frac{\sqrt{3}}{3}h^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - ah + \frac{\sqrt{3}}{3}h^2} = \frac{4h}{\sqrt{3}a - 2h} \doteq 32\,\%\,.$$

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha AG ... aktivní elektrárna

Jaderná elektrárna Temelín má tepelný výkon $P = 6{,}2\,\mathrm{GW}$. Uvažujme, že průměrná využitelná energie uvolněná při rozpadu jednoho jádra uranu $^{235}\mathrm{U}$ je $E_0 = 200\,\mathrm{MeV}$ a veškerý výkon je z tohoto rozpadu. Molární hmotnost izotopu $^{235}\mathrm{U}$ je $M_{\mathrm{U235}} = 235\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ a poločas rozpadu je $T = 7{,}04 \cdot 10^8\,\mathrm{let}$. Jeden banán má aktivitu $A = 15\,\mathrm{Bq}$. Kolikrát větší je aktivita $^{235}\mathrm{U}$ spotřebovaného za $t = 1{,}0\,\mathrm{s}$ v jaderné elektrárně Temelín oproti banánu?

Tuto úlohu Vám přináší Skupina ČEZ. *David chtěl být aktivní, ale nechtělo se mu cvičit.*

Nejprve si spočteme, kolik se v Jaderné elektrárně Temelín rozpadne jader uranu $^{235}\mathrm{U}$. Za jednu sekundu bude počet rozpadů

$$N = \frac{Pt}{E_0} \approx 2{,}1 \cdot 10^{20}\,.$$

Dáme si pozor na jednotky a uvědomíme si, že $E_0 = 200\,\mathrm{MeV} = 3{,}20 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}$. Pro aktivitu platí vzorec

$$A = \lambda N\,,$$

kde λ je rozpadová konstanta, pro kterou zase platí

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}\,,$$

kde T je poločas rozpadu.

Kombinací těchto vzorců a faktu, že nás zajímá poměr aktivit Jaderné elektrárny Temelín A_{U} a banánu A, dostáváme výsledné řešení jako

$$\frac{A_{\mathrm{U}}}{A} = \frac{\frac{\ln 2}{T}\frac{Pt}{E_0}}{A} = \frac{Pt\ln 2}{AE_0T} = \frac{6{,}2 \cdot 10^9\,\mathrm{W} \cdot 1\,\mathrm{s} \cdot \ln 2}{15\,\mathrm{Bq} \cdot 3{,}20 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J} \cdot 2{,}22 \cdot 10^{16}\,\mathrm{s}} \doteq 402\,.$$

Aktivita uranu spotřebovaného v Jaderné elektrárně Temelín je asi 402-krát větší, než je aktivita banánu.

David Škrob
david.skrob@fykos.cz

Úloha AH ... voda ve vzduchu

Hasič hasí požár, přičemž z vyvýšeného místa nepřetržitě kropí okolí souvislým proudem vody z hadice. Hadici drží tak, že ústí je ve výšce $h_0 = 3{,}2\,\mathrm{m}$ nad povrchem země, na který voda následně dopadá. Voda vytéká z hadice o průměru $d = 75\,\mathrm{mm}$ rychlostí $v_0 = 4{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod počátečním úhlem $\alpha = 35^\circ$ vzhůru vzhledem k horizontální rovině. Jakou hmotnost má voda, která se v každém okamžiku nachází ve vzduchu?

Karel přemýšlel nad hasiči a imatrikulační vodní slavobránou.

Na to, aby sme určili, aký objem vody sa bude nachádzať v každom momente vo vzduchu, potrebujeme najprv spočítať čas, ako dlho sa bude každý vodný element vo vzduchu nachádzať. Jeho počiatočná výška nad zemou je h_0 a jeho počiatočná rýchlosť vo vertikálnom smere je $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$, takže jeho okamžitá výška nad zemou bude $h(t) = h_0 + v_{0y}t - gt^2/2$. V momente, keď vodný element dopadne na zem, sa táto výška musí rovnať nule, preto stačí vyriešiť vzniknutú rovnicu s nulovou pravou stranou pre čas t

$$h_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh_0}}{g} \doteq 1{,}09\,\mathrm{s}\,,$$

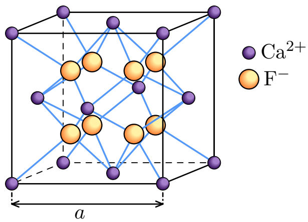
kde sme zvolili znamienko +, pretože nás zaujíma kladná hodnota času t (čas v budúcnosti). Teraz keď poznáme čas t, stačí spočítať, koľko vody sa stihne za tento čas dostať do vzduchu, teda vystrieknúť von z hadice. Tá má prietokovú rýchlosť v_0 a plochu prierezu $S = \pi d^2/4$, takže za dobu t ňou pretečie objem $V = Sv_0t$. Tento objem je potrebné prenásobiť hustotou vody ρ a dostaneme hľadanú hmotnosť vody nachádzajúcej sa vo vzduchu

$$M = \rho V = \rho S v_0 t = \frac{\pi d^2 \rho v_0}{4} \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh_0}}{g} \doteq 20\,\mathrm{kg}\,.$$

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha BA ... valentýnský kazivec

Jak tak Vlado před Valentýnem hledal nějaký romantický dárek pro svou přítelkyni Julku, zavítal do obchodu s různými ozdobnými minerály. Zaujaly ho výrobky z kazivce, a tak se začal více zamýšlet nad jejich mystickými vlastnostmi. Vypočítejte, jaká je hustota monokrystalu kazivce a výsledek uveďte na čtyři platné číslice. Jedna buňka kazivce (CaF_2) *má rozměr* $a = 5{,}463\,\mathrm{Å}$. *Jeho krystalovou mřížku naleznete na přiloženém obrázku. Molární hmotnosti vápníku a fluoru jsou po řadě* $M_{Ca} = 0{,}040\,08\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ *a* $M_F = 0{,}019\,00\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$.



Tento rok to bude znovu kytice.

Monokrystal kazivce je tvořený opakováním velkého množství elementárních mřížek. Spočítáním „kuliček na obrázku" zjistíme, že elementární mřížku tvoří 8 atomů fluoru a 14 atomů vápníku; musíme si ale uvědomit, že každý z atomů vápníku, který se nachází ve středu stěny je sdílený dvěma buňkami a že každý z atomů vápníku, který se nachází ve vrcholu, je sdílený mezi osmi buňkami. Dohromady tedy dostaneme, že v celém krystalu na jednu buňku v průměru připadne 8 atomů fluoru a $1 + 4/2 + 8/8 = 4$ atomy vápníku – toto také odpovídá faktu, že sumární vzorec kazivce je CaF_2.

Pro výpočet hustoty nyní stačí určit poměr hmotnosti těchto 12 atomů ku objemu elementární mřížky, tedy

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{8m_F + 4m_{Ca}}{a^3} = \frac{8M_F + 4M_{Ca}}{N_A a^3}\,,$$

kde $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ značí Avogadrovu konstantu a $M_{Ca} = 0{,}040\,08\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ a $M_F = 0{,}019\,00\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$ značí molární hmotnosti jednotlivých prvků. Převedením $a = 5{,}463\,\mathrm{Å} = 5{,}463 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ a dosazením dojdeme k výsledku

$$\rho \doteq 3\,181\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,,$$

který odpovídá tabulkové hodnotě.

Vojtěch David
`vojtech.david@fykos.cz`

Úloha BB ... drknutí do sklenice

Máme válcovou sklenici s výškou h a průměrem podstavy d. Předpokládejme, že její těžiště je ve středu její osy. Jaký minimální koeficient statického tření s podložkou je potřeba, aby bylo možné sklenici převrhnout pouze tlačením z boku? Tlačit lze do libovolného místa, ale pouze vodorovně. *Lego rozbil skleničku.*

Moment sily, ktorý musíme prekonať, je moment, ktorým by tiaž pôsobila voči bodu dotyku s podložkou pri limitnom naklonení pohára. Tiaž pôsobí v strede pohára, takže rameno sily bude mať voči bodu dotyku vodorovnú vzdialenosť $d/2$. Veľkosť tohto momentu by bola $M_1 = mgd/2$, kde sme si označili hmotnosť pohára ako m.

Ak by sme do pohára drgli silou väčšou než je maximálna sila statického trenia, začal by sa po podložke kĺzať, čím by koeficient trenia klesol na hodnotu koeficientu dynamického trenia. Najväčšia šanca pohár prevrhnúť bude práve vtedy, keď zatlačíme presne silou statického trenia, čiže fmg.

Zároveň záleží na tom, v ktorom mieste pohára doň drgneme. Ak by sme do pohára zatlačili pri jeho podstave, asi je intuitívne, že ho zrejme neprevrhneme. Najväčší moment sily vyvoláme, keď budeme tlačiť v jeho najvyššom bode, čiže h od podstavy. Vtedy sila nášho tlačenia a trecia sila budú spolu pôsobiť na pohár momentom sily $M_2 = mgfh$. Dostávame rovnicu

$$M_1 = M_2\,,$$

$$mg\frac{d}{2} = mgfh\,,$$

$$\frac{d}{2h} = f\,.$$

Toto je teda minimálne f potrebné na to, aby sme pohár začali nakláňať. Ale keď ho už nakloníme, zvislá vzdialenosť bodu, v ktorom tlačíme voči osi otáčania narastie, a zároveň vodorovná vzdialenosť ťažiska od osi otáčania klesne. Z toho vyplýva, že hodnota f, ktorá by stačila na počiatočné naklonenie, bude určite stačiť aj na úplné prevrhnutie pohára.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha BC ... mince na vodě

Na vodě leží mince z kovu o hustotě $\rho = 2\,580\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, poloměru $r = 8{,}10\,\mathrm{mm}$ a výšce $h = 0{,}651\,\mathrm{mm}$. Díky povrchovému napětí se mince nepotopí. Na jakou minimální teplotu je potřeba ohřát vodu, aby se potopila? Povrchové napětí vody je při teplotě $50{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ $\sigma_{50} = 67{,}92\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$ a při teplotě $60{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ $\sigma_{60} = 66{,}18\,\mathrm{mN{\cdot}m^{-1}}$. Předpokládejte, že závislost povrchového napětí na teplotě je lineární.

Danka by si chtěla zkusit lehnout si na vodu a nezmoknout.

Výsledná sila spôsobená povrchovým napätím vody pôsobiaca na mincu bude $F = -\sigma l \cos\theta$, kde $l = 2\pi r$ je dĺžka, na ktorej je minca v kontakte s povrchom vody, a θ je kontaktný (zmáčavý) uhol hladiny vody voči hrane mince. Na to, aby minca plávala na hladine, musí sila povrchového napätia vykompenzovať tiaž mince, takže musí platiť

$$-2\pi\sigma r\cos\theta = mg\,,$$

kde $m = \pi r^2 h\rho$. Je zjavné, že limitným prípadom s minimálnym postačujúcim povrchovým napätím bude situácia s $\theta = 180^\circ$. Z toho dostávame hodnotu povrchového napätia

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r} = \frac{rh\rho g}{2}\,.$$

Zostáva nám dopočítať teplotu, pri ktorej voda nadobudne takúto hodnotu povrchového napätia. Ak si označíme $t_{50} = 50{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ a $t_{60} = 60{,}0\,^\circ\mathrm{C}$, lineárnu závislosť popísanú hodnotami σ_{50} a σ_{60} vieme zapísať ako $\sigma(t) = \sigma_{50} + (\sigma_{60} - \sigma_{50})(t - t_{50})/(t_{60} - t_{50})$. Z nej stačí vyjadriť teplotu t, čím postupne dostávame

$$\begin{aligned}
\sigma_{50} + (\sigma_{60} - \sigma_{50})\frac{t - t_{50}}{t_{60} - t_{50}} &= \frac{rh\rho g}{2}\,,\\
\frac{t - t_{50}}{t_{60} - t_{50}} &= \frac{\frac{rh\rho g}{2} - \sigma_{50}}{\sigma_{60} - \sigma_{50}}\,,\\
t = t_{50} + \frac{\frac{rh\rho g}{2} - \sigma_{50}}{\sigma_{60} - \sigma_{50}}&(t_{60} - t_{50}) \doteq 56{,}8\,^\circ\mathrm{C}\,.
\end{aligned}$$

Jakub Kliment
jakub.kliment@fykos.cz

Úloha BD ... prokrastinační

Na Marka se sápe povinnost, tak ji chytí, přiváže ji na provaz dlouhý $l = 3{,}0\,\mathrm{m}$, zatočí s ní tak, že provaz svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 15^\circ$, a z provazu ji vypustí. Protože je ale povinnost dotěrná, jen co dopadne, rozběhne se z klidu za Markem se zrychlením $a = 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, zatímco on od vypuštění utíkal od bodu, kam měla povinnost odpadnout, rychlostí $v = 15\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Pokud je Marek vysoký $h = 2{,}0\,\mathrm{m}$ a v této výšce drží provaz, za jak dlouho po dopadu ho povinnost dostihne? *Marek je muž soustředění, závazků a čiré vůle.*

Úloha je ďábelskou sérií malých výpočtů, které na sebe navazují.

Rozeberme nejdříve situaci, kdy Marek s povinností točil. Z rovnováhy sil zjistíme, že odstředivá síla působící na povinnost byla $F_\mathrm{o} = mg\cot\alpha = mv_\mathrm{t}^2/r$, kde m je hmotnost povinnosti, g je tíhové zrychlení, v_t je tečná rychlost povinnosti a r je poloměr otáčení, pro který platí $r = l\cos\alpha$. Dostaneme tak počáteční rychlost následujícího vodorovného vrhu

$$v_\mathrm{t} = \sqrt{gl\cos\alpha\cot\alpha} \doteq 10{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Jeho počáteční výška byla $h' = h - l\sin\alpha$ a vrh trval čas $t = \sqrt{2h'/g} \doteq 0{,}50\,\mathrm{s}$. Za tu dobu povinnost uletěla vzdálenost $D = v_\mathrm{t}t \doteq 5{,}14\,\mathrm{m}$, ale protože neletěla přímo od Marka, při náhledu shora uvidíme pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami r a D, hledaná vzdálenost dopadu povinnosti od Marka je pak

$$d = \sqrt{D^2 + r^2} \doteq 5{,}90\,\mathrm{m}\,.$$

Ve chvíli, kdy Marek povinnost vypustil, vyběhl, a tedy když se za ním rozběhne, má Marek náskok

$$x_0 = vt + d \doteq 7{,}98\,\mathrm{m}\,.$$

Pro čas T, za který Marka doběhne, platí

$$\frac{1}{2}aT^2 = x_0 + vT\,,$$
$$T = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2a\ x_0}}{a}\,,$$

kde jsme vzali fyzikální kladný kořen.

Dosazením postupně do vzorců dostaneme $T = 7{,}1\,\mathrm{s}$.

Marek Milička
marek.milicka@fykos.cz

Úloha BE ... záchrana Schrödingerovy kočky

Anička má v krabici zavřenou Schrödingerovu kočku, jež má zpočátku pravděpodobnost přežití $p_0 = 50\,\%$. O kočku se bojí, a tak uzavře dohodu s kouzelnou vílou – ta třikrát sešle oživovací kouzlo, které pokaždé zasáhne krabici v náhodném místě. Krabice má v půdorysu tvar obdélníku o rozměrech $a = 90\,\mathrm{cm}$ a $b = 75\,\mathrm{cm}$. Kočku, která se během sesílání kouzel nepohne, lze při pohledu shora modelovat jako kruh o poloměru $r = 15\,\mathrm{cm}$ umístěný náhodně v krabici. Pokud je kočka zasažena, je okamžitě zachráněna. Jaká je pravděpodobnost, že je kočka po třetím seslání kouzla naživu? *Anička se bojí koček.*

Je výhodnější spočítat si pravděpodobnost p_n případů, ve kterých kočka zasažena nebude – tím se totiž vyhneme řešení situací, v nichž je kočka zasažena vícekrát. Pravděpodobnost, že kočka zasažena byla, je pak $p_\mathrm{z} = 1 - p_\mathrm{n}$.

Pravděpodobnost zasažení kočky záchranným kouzlem odpovídá dopadu kouzla do plochy velikosti průřezu kočky oproti celkové ploše, kterou může zasáhnout. Máme tedy

$$p_\mathrm{z} = \frac{\pi r^2}{ab}\,.$$

Pravděpodobnost, že jedno kouzlo kočku nezasáhne, je pak

$$p_\mathrm{n} = 1 - \frac{\pi r^2}{ab}\,.$$

Aby kočka zemřela, nesmí být zasažena ani jednou a musí být mrtvá již na začátku. Platí pak

$$p_\theta = p_0 \left(1 - \frac{\pi r^2}{ab}\right)^3\,,$$

a pravděpodobnost přežití kočky pak vyčíslíme jako

$$p_{\neg\theta} = 1 - p_0 \left(1 - \frac{\pi r^2}{ab}\right)^3 \doteq 64\,\%\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha BF ... kulička ve válci

Máme plnou homogenní kuličku s poloměrem r a hmotností m, která se kutálí uvnitř válcové dutiny s vnitřním poloměrem $R = 3r$. Dutina leží tak, že její hlavní osa je rovnoběžná s vodorovnou rovinou, a tíhové zrychlení g působí ve svislém směru. Po dobu pár otoček můžeme zanedbat energetické ztráty a kulička neprokluzuje. Poměr rychlostí kuličky v nejnižším místě pohybu v_1 a nejvyšším místě v_2 je $v_1 = 7v_2/4 = 1{,}75v_2$. Jaké maximální rychlosti $v_{\max}$ dosahuje kulička v průběhu pohybu? Jako výsledek odevzdejte vzorec vyjádřený v závislosti pouze na parametrech m, g a r. *Karel chtěl dát úlohu s obrázkem a pak byl líný ho kreslit.*

Kulička ve válci koná translační i rotační pohyb, který je svázaný díky tomu, že neprokluzuje. To můžeme zachytit vztahem mezi její rychlostí v, poloměrem r a úhlovou rychlostí ω

$$v = r\omega\,.$$

Celková kinetická energie kuličky je součtem translační a rotační energie

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}J\omega_i^2\,,$$

kde index i jsme zavedli pro situace 1 odpovídající nejnižšímu místu pohybu a 2 nejvyššímu místu. J je pak moment setrvačnosti, který je pro plnou homogenní kuličku

$$J = \frac{2}{5}mr^2\,.$$

Vztah pro kinetickou energii můžeme upravit na

$$E_i = \frac{7}{10}mv_i^2\,.$$

Maximální rychlost bude mít kulička v nejnižším bodě svojí dráhy (v_1), přičemž rozdíl kinetické energie v nejvyšším a nejnižším bodě je dán rozdílem potenciálních energií $\Delta E_\mathrm{p} = mg(h_2 - h_1)$. Nejspodnější poloha těžiště kuličky je ve výšce $h_1 = r$ nad spodkem válce a nejvyšší poloha pak ve výšce $h_2 = 2R - r = 6r - r = 5r$. Po dosazení do zákona zachování energie a pár úpravách se postupně dostáváme k výsledku

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}mv_1^2 &= \frac{7}{10}mv_2^2 + mg\left(h_2 - h_1\right)\,,\\
v_1^2 - v_2^2 &= \frac{10}{7}g\left(5r - r\right)\,,\\
v_1^2 - \frac{4^2}{7^2}v_1^2 &= \frac{10}{7}g\cdot 4r\,,\\
v_1 &= \sqrt{\frac{280}{33}gr} \approx 2{,}91\sqrt{gr} \approx \sqrt{\frac{r}{\mathrm{m}}}\cdot 9{,}12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

Maximální rychlost v průběhu pohybu je $v_{\max} = v_1 = \sqrt{280gr/33}$ a tedy nezávisí na m.

Zbývá ověřit, že úloha není chyták, míček skutečně vykoná celou rotaci a nespadne při tom. Spadl by, kdyby tíhová síla byla větší než dostředivá síla potřebná k jeho zatáčení. Srovnáme dostředivé zrychlení

$$a_\mathrm{do} = \frac{v_2^2}{2r} = \frac{320}{231}g > g\,,$$

přičemž poloměr rotace jsme dosazovali $R-r=2r$, protože právě po takovém poloměru kulička obíhá. Zjišťujeme, že gravitační síla není dost silná, aby míček strhla dolů v nejvyšším bodě trajektorie, tím pádem ani ve zbývajících bodech trajektorie.

Závěrem bychom mohli poznamenat, že se nám málem podařilo zadat konstanty tak, že by to nebylo možné a kulička by v průběhu spadla. Úlohu jsme ale nechtěli zadat jako chyták.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha BG ... míč v ruce

Chceme chytit velký míč jednou rukou a držet ho pod ní. Situaci proto modelujme následovně. Máme $N=5$ prstů, můžeme tedy působit v N bodech. Tření mezi prstem a míčem je $f = 0{,}53$. Prsty jsou rozmístěny symetricky kolem pólu míče, který míří směrem nahoru v našem tíhovém poli. Jaký nejmenší zenitový úhel musíme zvolit (tedy jak nejblíže pólu), abychom míč ještě udrželi? Hmotnost míče je $550\,\mathrm{g}$ a normálová síla, kterou jeden prst může na míč působit, je $5{,}6\,\mathrm{N}$. *Jarda nikdy nechápal, jak někdo může takto udržet basketbalový míč.*

Abychom mohli míč v klidu držet v ruce, potřebujeme, aby výslednice sil na něj působících byla nulová. Směrem dolů na něj působí tíhová síla mg, kterou musí kompenzovat třecí síla. Ta má pro každý prst velikost fF, kde F je síla, kterou prst působí kolmo na povrch míče.

Nechť tato síla svírá se svislou rovinou úhel α. Tak třecí síla svírá s vodorovnou rovinou také úhel α a působí proti směru případného pohybu míče, tedy směrem k pólu míče (nejvýše položenému bodu). Vodorovná složka třecí síly je $Ff\cos\alpha$ a svislá, působící nahoru, je $Ff\sin\alpha$.

Nyní je důležité si uvědomit, že ve vodorovném směru se složky třecí Ff i tlakové síly F navzájem vyruší, protože jsme prsty rozložili rovnoměrně symetricky kolem svislé osy procházející pólem míče. Ve svislém směru působí zmíněná tíhová síla, třecí síla a také svislá složka tlakové síly $F\cos\alpha$, která působí směrem dolů. Aby byla výslednice nulová, musí platit

$$mg + NF\cos\alpha = NFf\sin\alpha\,.$$

Vyjádříme $\sin\alpha$ pomocí kosinu jako $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, dosadíme a upravíme

$$\begin{aligned} mg + NF\cos\alpha &= NFf\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,,\\ m^2g^2 + 2mgNF\cos\alpha + N^2F^2\cos^2\alpha &= N^2F^2f^2 - N^2F^2f^2\cos^2\alpha\,,\\ m^2g^2 - N^2F^2f^2 + 2mgNF\cos\alpha + N^2F^2\left(f^2+1\right)\cos^2\alpha &= 0\,, \end{aligned}$$

odkud řešením kvadratické rovnice (bereme to kladné, aby platilo $\alpha < 90^\circ$) dostáváme

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{2N^2F^2\left(f^2+1\right)}\left(-2mgNF + \sqrt{4m^2g^2N^2F^2 - 4\left(m^2g^2 - N^2F^2f^2\right)N^2F^2\left(f^2+1\right)}\right),\\ \cos\alpha &= \frac{1}{NF\left(f^2+1\right)}\left(-mg + f\sqrt{N^2F^2\left(f^2+1\right) - m^2g^2}\right),\\ \cos\alpha &= f\sqrt{\frac{1}{f^2+1} - \frac{m^2g^2}{N^2F^2\left(f^2+1\right)^2}} - \frac{mg}{NF\left(f^2+1\right)}\,,\\ \alpha &\doteq 72^\circ\,. \end{aligned}$$

Kdyby byl úhel větší, tak by pravá strana první rovnice byla větší než levá a míč bychom jednoduše udrželi. V opačném případě bychom míč neudrželi. Díky rovnosti jsme tak našli hledanou limitní hodnotu.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha BH ... šrouby a matice

David se jednou vzbudil se zvláštním snem: chtěl do matky s vnitřním průměrem $d_1 = 12{,}0\,\mathrm{mm}$ dát šroub s vnějším průměrem $d_2 = 18{,}0\,\mathrm{mm}$, obě hodnoty naměřené při pokojové teplotě $t_{\mathrm{pokoj}} = 20{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Na pomoc si v krámku koupil karafu kapalného dusíku, jehož teplota při použití byla $T_{\mathrm{N_2}} = 77{,}0\,\mathrm{K}$, do které šroub dal. Určete, na jakou termodynamickou teplotu musí zahřát matku, aby se do sebe daly zašroubovat. Roztahování a zmenšování drážek zanedbejte. Tepelná roztažnost obou objektů je $\alpha = 345 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$. Uvažujeme, že koeficient α je vůči teplotě indiferentní.

David povídal Matyášovi o jeho životním snu.

Potřebujeme, aby tepelně roztažený průměr matky byl stejně velký jako tepelně snížený průměr šroubu. Vzorec pro tepelnou roztažnost je

$$l_T = l_0(1 + \alpha \Delta t)\,.$$

Jelikož se naše rozměry musí rovnat, víme, že

$$d_1(1 + \alpha(T_{\mathrm{matka}} - T_{\mathrm{pokoj}})) = d_2(1 + \alpha(T_{\mathrm{N_2}} - T_{\mathrm{pokoj}}))\,,$$

kde po úpravách dostáváme

$$T_{\mathrm{matka}} - T_{\mathrm{pokoj}} = \frac{d_2(1 + \alpha(T_{\mathrm{N_2}} - T_{\mathrm{pokoj}}))}{d_1 \alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

a vyjádříme T_{matka}

$$T_{\mathrm{matka}} = \frac{d_2(1 + \alpha(T_{\mathrm{N_2}} - T_{\mathrm{pokoj}})) - d_1}{d_1 \alpha} + T_{\mathrm{pokoj}} \doteq 1\,420\,\mathrm{K}\,.$$

Matyáš Beran
matyas.beran@fykos.cz

Úloha CA ... lusknutím prstů

Ve filmu Avengers: Infinity War *záporák Thanos lusknutím prstů obrátí polovinu živých bytostí ve vesmíru v prach. Představme si, že to fyzikálně dokáže tak, že těmto organismům ve vesmíru učiní všechny atomy v jejich tělech nestabilními s velmi krátkým poločasem života. Jestliže se za $T = 5\,\mathrm{s}$ od lusknutí zasažené bytosti rozpadnou z $p = 99\,\%$, jaký byl jejich poločas rozpadu?*

Druhá polovina vesmíru zemřela na rakovinu z doprovázejícího ozáření.

Využijeme znalost rozpadového zákona,

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}\,,$$

který udává počet nerozpadlých částic N v čase t, pokud N_0 je počáteční počet částic. λ je rozpadová konstanta, která s poločasem rozpadu $T_{1/2}$ souvisí vztahem

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \,.$$

V zadaném čase T počet rozpadlých částic splňuje podmínku

$$p = \frac{N_0 - N(T)}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} T} \,.$$

Teď už nám jen stačí vyjádřit $T_{1/2}$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{1-p}} T \doteq 0{,}75\,\mathrm{s}\,.$$

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha CB ... jak šlo kolo na vandr

Paťo jel autem po dlouhé rovné prázdné cestě do kopce s konstantním úhlem sklonu $\alpha = 3{,}8^\circ$. Vtom uslyšel divný zvuk, pohlédl do zrcátka a srdce mu spadlo do kalhot: zadní kolo jeho auta se kutálelo za vozidlem! Auto ale pokračovalo dál, jakoby se vůbec nic nestalo, a tak začal přemýšlet, co s kolem. Zastavovat ho by bylo nebezpečné, a tak se na něj rozhodl počkat na místě, kde se zastaví. V jaké vzdálenosti od místa odpojení se kolo zastaví?

Kolo považujte za tuhý homogenní válec s hmotností $m = 21\,\mathrm{kg}$ a poloměrem $r = 32\,\mathrm{cm}$. Bezprostředně po odpojení mělo kolo obvodovou rychlost $v = 90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a až do zastavení se bez prokluzování kutálelo po přímočaré trajektorii auta. Kolo je zároveň proti směru pohybu zpomalováno odporovou silou o velikosti kF_N působící v těžišti, kde $k = 2{,}4 \cdot 10^{-2}$ je koeficient úměrnosti a F_N normálová síla, kterou cesta působí na kolo. Deformaci kola neuvažujte.

Paťovi se řízení zdá nebezpečné.

Riešenie pomocou práce a energie

Koleso sa po odpojení pohybovalo nenulovou rýchlosťou v, z toho dôvodu spočítame jeho počiatočnú kinetickú energiu E_k. Tá je daná súčtom translačnej kinetickej energie

$$E_\mathrm{k,t} = \frac{1}{2} m v^2$$

reprezentujúcej posuvný pohyb ťažiska kolesa; a rotačnej kinetickej energie $E_\mathrm{k,r}$ popisujúcej jeho otáčavý pohyb, pre ktorú platí

$$E_\mathrm{k,r} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right)\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} m v^2 \,.$$

V predošlom vzťahu $I = mr^2/2$ predstavuje moment zotrvačnosti plného homogénneho valca voči jeho osi a ω predstavuje uhlová rýchlosť kolesa, pre ktorú z podmienky neprešmykovania platí $v = \omega r$.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť nulovú hladinu potenciálnej energie (gravitačného poľa) v mieste odpadnutia kolesa. Na koleso ešte pôsobí odporová sila, avšak v momente odpadnutia nestihla vykonať žiadnu prácu, nakoľko koleso zatiaľ neprešlo žiadnu dráhu. Celková počiatočná energia E_1 kolesa bezprostredne po odpojení je potom

$$E_1 = E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k,t} + E_\mathrm{k,r} = \frac{3}{4} m v^2\,.$$

Pozrime sa teraz na konečný stav kolesa, kedy zastaví. Jeho kinetická energia bude nutne nulová, pohybom do kopca však vzrastie potenciálna energia. S ohľadom na zvolenú nulovú hladinu v mieste odpojenia bude konečná potenciálna energia E_p daná ako

$$E_\mathrm{p} = mg\Delta h = mgs\sin\alpha\,,$$

kde $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je štandardné tiažové zrýchlenie a Δh výškový rozdiel. Tento rozdiel sme určili z geometrie situácie pomocou uhla sklonu cesty α a veľkosti prejdenej dráhy s, ktorú hľadáme. Zároveň sa na brzdení podieľa aj odporová sila kF_N, pričom pre normálovú silu platí $F_\mathrm{N} = mg\cos\alpha$. Odpor je počas celého deja konštantný a práca W odporovej sily na dráhe s je potom

$$W = kF_\mathrm{N}s = kmgs\cos\alpha\,.$$

Zo zákona zachovania energie plynie, že celá počiatočná energia E_1 sa musí premeniť na nárast potenciálnej energie E_p a na teplo dané prácou W odporovej sily

$$E_1 = E_\mathrm{p} + W\,,$$
$$\frac{3}{4} m v^2 = mgs\sin\alpha + kmgs\cos\alpha\,.$$

Odtiaľ už len vyjadríme a dosadením hodnôt vyčíslime dráhu s, na ktorej koleso zastaví

$$s = \frac{3v^2}{4g\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)} \doteq 0{,}53\,\mathrm{km}\,. \tag{1}$$

Riešenie pomocou síl

Alternatívne možno úlohu vyriešiť zostavením silovej a momentovej pohybovej rovnice. Výslednica vonkajších síl bude spomaľovať posuvný pohyb hmotného stredu, ale súčasne aj ich momenty začnú spomaľovať otáčanie celého kolesa; pričom tieto dva deje sú spolu pevne prepojené podmienkou neprešmykovania (v tomto prípade $a = \varepsilon r$ pre zrýchlenie a posuvného pohybu ťažiska a uhlové zrýchlenie ε celého kolesa), ktorú zabezpečuje statická trecia sila F_t.

Pohybový účinok na koleso má okrem trenia F_t aj zložka tiažovej sily $mg\sin\alpha$ smerujúca proti pohybu kolesa a tiež odporová sila $kF_\mathrm{N} = kmg\cos\alpha$ rovnakého smeru. Pri valení dopredu má koleso tendenciu prešmykovať na podložke dozadu, trecia sila F_t potom pôsobí v smere pohybu, presne opačne ako ostatné sily. Ak zvolíme aktuálny smer kotúľania kolesa za kladný, silová rovnica posuvného pohybu má tvar

$$ma = -mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha + F_\mathrm{t}\,. \tag{2}$$

Podobne môžeme pre rotáciu kolesa okolo svojej osi zostaviť momentovú rovnicu. Tiažová i odporová sila pôsobia v ťažisku ležiacom na osi, preto bude ich moment nulový. Trecia sila F_t

pôsobí v rovine vozovky v bode dotyku s kolesom, jej moment vzhľadom na os kolesa je vďaka kolmosti dotyčnice na polomer kružnice (resp. valca) rovný $F_\mathrm{t} r$. Získavame momentovú rovnicu

$$I\varepsilon = -F_\mathrm{t} r\,.$$

Záporné znamienko momentu trecej sily plynie z toho, že aj keď má trecia sila smer pohybu kolesa, roztáča ho presne opačným (záporným) smerom. Po dosadení $I = mr^2/2$ a $a = \varepsilon r$ vyjadríme treciu silu F_t ako

$$F_\mathrm{t} = -\frac{1}{2} ma\,.$$

Dosadením do pohybovej rovnice (2) dostávame zrýchlenie

$$a = -\frac{2}{3} g \left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)\,.$$

Nakoľko je zrýchlenie konštantné, možno uplatniť štandardné kinematické rovnice pre rovnomerne zrýchlený pohyb. Pre rýchlosť $u(t)$ kolesa v čase (v kladnom smere) platí

$$u(t) = at + v = -\frac{2}{3} gt \left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right) + v\,.$$

V čase zastavenia t_z je rýchlosť nulová ($u(t_\mathrm{z}) = 0$), z rovnice ho možno vyjadriť ako

$$t_\mathrm{z} = \frac{3v}{2g\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)}\,.$$

Hľadaná dráha s, ktorú koleso prejde rovnomerne spomaleným pohybom za dobu t_z, je potom

$$s = \frac{1}{2} a t_\mathrm{z}^2 + v t_\mathrm{z} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3} g \left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)\right)\left(\frac{9v^2}{4g^2\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)^2}\right) + \frac{3v^2}{2g\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)} =$$

$$= -\frac{3v^2}{4g\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)} + \frac{3v^2}{2g\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)} = \frac{3v^2}{4g\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)} \doteq 0{,}53\,\mathrm{km}\,,$$

čo odpovedá výsledku (1).

Patrik Stercz
patrik.stercz@fykos.cz

Úloha CC ... Wienův filtr

Takzvaný Wienův filtr *je zařízení, které se používá, abychom z proudu nabitých částic vybrali jen ty, které mají specifickou rychlost. Zařízení sestává ze dvou rovnoběžných destiček, mezi kterými je homogenní elektrické pole o velikosti E a na něj kolmé homogenní magnetické pole o velikosti B. Proud částic mezi destičky nalétává tak, že je jejich rychlost kolmá na obě pole. Máme-li zadané pole E a B, částice s jakou velikostí rychlosti ve filtru nezmění směr svého pohybu?* *Petr seděl na přednášce z jaderné fyziky.*

Budeme potřebovat vztahy pro elektrickou a magnetickou sílu

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}\,,$$
$$\mathbf{F}_B = q\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\,.$$

Ve Wienově filtru jsou směry elektrického a magnetického pole zvoleny tak, že na prolétávající částici působí síly přesně v opačném směru. Úlohu tak můžeme řešit jednorozměrně; protože rychlost prolétávající částice a **B** jsou navzájem kolmé, vektorové násobení se nám převede na jednoduché. Aby částice filtrem proletěla, nesmí být její pohyb jakkoliv zakřiven, tedy

$$F_E - F_B = 0\,,$$
$$qE - qvB = 0\,.$$

To nám na rychlost částic dává jednoduchou podmínku

$$v = \frac{E}{B}\,.$$

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha CD ... rotující umyvadlo

Představte si umyvadlo tvaru dutého válce o poloměru r. Z jednoho místa na okraji jeho dna tryská voda tak, že dopadá přímo do středu dna umyvadla a v nejvyšším bodě je ve výšce h nad povrchem. Na jakou největší úhlovou rychlost můžeme umyvadlo i s tryskou roztočit kolem osy válce, aby voda nedopadala na plášť válce? *Tým FYKOS byl na návštěvě v CosmoCaixa.*

Dokud se umyvadlo netočí, tak platí

$$r = v_0 t \cos\alpha\,,$$

kde r je poloměr umyvadla, v_0 je počáteční rychlost vody (vzhledem k umyvadlu a nyní i vzhledem k zemi) a $\cos\alpha$ počáteční směr vůči zemi. Čas t, po který jsou kapky ve vzduchu, můžeme vyjádřit z vertikální rychlosti

$$0 = v_0 \sin\alpha - g\frac{t}{2}\,,$$
$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\,,$$

která je zase spojena s dosaženou výškou h skrze zákon zachování energie jako

$$\frac{1}{2}m\left(v_0\sin\alpha\right)^2 = mgh\,,$$
$$v_0^2\sin^2\alpha = 2gh\,.$$

Ze zadaných parametrů tedy dokážeme vyjádřit

$$t = \sqrt{\frac{8h}{g}}\,.$$

Když umyvadlo roztočíme úhlovou rychlostí ω, tak vzhledem k zemi se kapkám přidá ještě další vodorovná složka rychlosti, která má směr tečně k pohybu a velikost $v_\perp = \omega r$.

Víme, že voda ve směru normálovém urazí vzdálenost r. Aby však nedopadla na střed kruhu, ale na jeho okraj, musí i v tečném směru urazit vzdálenost r (to je v tomto směru vzdálenost středu a okraje). Musí tak platit

$$v_\perp t = r = \omega r t \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{t} = \sqrt{\frac{g}{8h}}\,.$$

Hledaná úhlová rychlost tak je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{8h}}\,.$$

Kdybychom umyvadlo roztočili rychleji, tak by voda dopadala na plášť válce v nenulové výšce.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha CE ... Titanic

Titanic pluje rychlostí $v = 45{,}0\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ směrem k ledovci, když vtom kapitán lodi spustí lodní sirénu, která vydává zvuk s frekvencí $f = 440\,\mathrm{Hz}$. Poté, co siréna umlkne, se zvuk od ledovce odrazí zpátky. Jakou frekvenci f' kapitán uslyší?

Kdyby byl kapitán Petr, možná by si toho všiml.

Treba si uvedomiť, že Titanic aj ľadovec sú zároveň vysielačom aj prijímačom, závisí to od smeru. Ak Titanic vyšle zvuk s frekvenciou f, znamená to, že Titanic je zdroj pohybujúci sa rýchlosťou v a ľadovec je stojaci prijímač, ktorý zachytí tento zvuk s frekvenciou

$$f_1 = f\frac{c_\mathrm{s}}{c_\mathrm{s} - v}\,.$$

Zvuk sa odrazí od ľadovca stále s frekvenciou f_1, čiže ľadovec sa správa ako stojaci zdroj. A Titanic sa teraz pohybuje zvuku naproti, čiže sa správa ako pohybujúci sa prijímač, čiže zachytí zvuk s frekvenciou

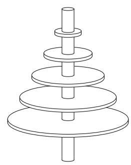
$$f' = f_1\frac{c_\mathrm{s} + v}{c_\mathrm{s}} = f\frac{c_\mathrm{s}}{c_\mathrm{s} - v}\frac{c_\mathrm{s} + v}{c_\mathrm{s}} = f\frac{c_\mathrm{s} + v}{c_\mathrm{s} - v} \doteq 473\,\mathrm{Hz}\,.$$

Inými slovami: ľadovec sa správa ako zrkadlo, a teda proti sebe idú akoby dve lode Titanic, prvá je zdroj a druhá je prijímač.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha CF ... vánoční stromeček

Martin se chtěl zbavit jehličí z vánočního stromku, tím že ho roztočí kolem osy symetrie na úhlovou rychlost $\omega = 5{,}5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Aproximujme vánoční stromek jako tyč s výškou $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a poloměrem $r/2$ a 5 disků o poloměrech $1r$, $2r$, $3r$, $4r$, $5r$, kde $r = 15\,\mathrm{cm}$ s tloušťkou $l = 5{,}0\,\mathrm{mm}$. Středová tyč prochází skrz disky (které tedy mají uprostřed díru) a má hustotu $\rho = 900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Disky mají hustotu poloviční. Martina zajímá kolik energie potřebuje k tomuto roztočení.



Fykosáci a Martin čekali na přednášku.

Kinetická energia rotačného pohybu je $E_\mathrm{k} = I\omega^2/2$, takže nám zostáva zistiť už len moment zotrvačnosti stromčeka I.

Ignorujme na chvíľu diery v diskoch. Moment zotrvačnosti pre plný disk s hmotnosťou m a polomerom R je $I = mR^2/2$. Hmotnosť spočítame ako súčin hustoty a objemu, čiže v tomto prípade $m = (\rho/2)\pi R^2 l$. Spolu teda pre disk s polomerom R dostávame moment zotrvačnosti

$$I(R) = \frac{1}{4}\pi\rho l R^4\,.$$

Keď potom postupne podosádzame $R = ir$, dostaneme celkový moment zotrvačnosti diskov

$$I_\mathrm{d} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{4}\pi\rho l (ir)^4 = \frac{1}{4}\pi\rho l r^4 (1 + 16 + 81 + 256 + 625) = \frac{979}{4}\pi\rho l r^4 \doteq 1{,}75\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Zostáva nám už len stredová palica. Tá má taktiež tvar disku, len s relatívne veľkou výškou v porovnaní s polomerom. Samotná palica by mala hmotnosť $\rho\pi(r/2)^2 h$, ale v miestach, kde prechádza cez disky sme polovicu z jej hustoty už započítali do diskov. Musíme preto odčítať $(\rho/2)\pi(r/2)^2 5l$. Jej výsledný moment zotrvačnosti teda bude

$$I_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\pi\rho\frac{r^2}{4}\left(h - \frac{5}{2}l\right)\frac{r^2}{4} = \frac{1}{32}\pi\rho\left(h - \frac{5}{2}l\right) r^4 \doteq 0{,}07\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}\,.$$

Vidíme, že $I_\mathrm{p} \ll I_\mathrm{d} \Rightarrow I_\mathrm{p} + I_\mathrm{d} \approx I_\mathrm{d}$, čo možno nie je až tak prekvapivé. Každopádne v rámci našej presnosti by takáto aproximácia nebola dostačujúca, takže potrebnú energiu spočítame ako

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}(I_\mathrm{p} + I_\mathrm{d})\omega^2 \doteq 27{,}5\,\mathrm{J}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha CG ... kmitá mi stůl

Těleso o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ je položeno na desce, která harmonicky kmitá ve své rovině s úhlovou frekvencí ω a amplitudou $A = 3{,}0\,\mathrm{cm}$. Jaká je hraniční ω taková, že deska začne pod tělesem prokluzovat? Součinitel tření mezi tělesem a deskou je $f = 0{,}60$.

Pepa doučoval mechaniku.

Výchylku dosky voči rovnovážnej polohe počas jej kmitania vieme vyjadriť štandardným vzťahom

$$x = A\sin(\omega t)\,.$$

Na teleso pri takomto pohybe dosky pôsobí zotrvačná sila veľkosti $|F| = m\ddot{x}$ v smere proti zrýchleniu $\ddot{x}$ dosky. Doska pritom začne prešmykovať v momente, keď veľkosť tejto sily presiahne maximálnu treciu silu. V tomto hraničnom prípade bude platiť

$$m\ddot{x} = fmg\,.$$

Zrýchlenie dosky však vieme určiť podľa známeho vzťahu pre zrýchlenie v harmonickom pohybe $\ddot{x} = -\omega^2 x$ alebo si ho vieme odvodiť ako druhú deriváciu výchylky podľa času

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 x\,.$$

Znamienko zrýchlenia tu udáva len jeho smer, takže ho môžeme ďalej zanedbať. Veľkosť zrýchlenia dosky potom rastie s veľkosťou jej výchylky, teda maximálna veľkosť tohto zrýchlenia bude

$$\ddot{x}_{\max} = \omega^2 A\,.$$

Stačí sa tak zamerať na prípad, v ktorom zotrvačná sila v momente maximálneho zrýchlenia práve presiahne hodnotu trecej sily. Tento hraničný prípad nastane pre

$$m\omega^2 A = fmg\,,$$

odkiaľ už jednoduchými úpravami vyjadríme potrebnú minimálnu uhlovú frekvenciu ako

$$\omega = \sqrt{\frac{fg}{A}} \doteq 14\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Tomáš Kubrický
`tomas.kubricky@fykos.cz`

Úloha CH ... Platónův tok

Jaký je tok elektrického pole přes jednu stěnu pravidelného ikosaedru (dvacetistěnu), v jehož středu sídlí náboj velikosti Q?

Jarda házel kostkou s dvaceti stěnami.

Celkový tok elektrického pole uzavřenou plochou je dle Gaussovy věty

$$\oint \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

Protože všech 20 stran ikosaedru je stejných, je tok jednou stranou $Q/(20\varepsilon_0)$, což je řešení naší úlohy.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha DA ... zahřívající se odpor

Máme zdroj napětí $U = 250\,\mathrm{V}$ a rezistor, jehož odpor se s teplotou mění jako $R(T) = R_0(1 + \alpha\Delta T)$, kde $R_0 = 5{,}0\,\Omega$ je odpor při pokojové teplotě, $\alpha = 4{,}9\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K^{-1}}$ je teplotní koeficient elektrického odporu a ΔT rozdíl teploty rezistoru od pokojové teploty. Předpokládejme, že teplota rezistoru je oproti okolí vyšší o $\Delta T = \beta P$, kde P je příkon na rezistoru a $\beta = 1{,}5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{K{\cdot}W^{-1}}$. Na jaké hodnotě se ustálí proud?

Lego si stavěl obvod.

Príkon na rezistore je $P = UI = U^2/R$. Tento vzťah dosadíme do vzorca pre teplotný rozdiel, a ten následne do vzorca pre odpor

$$R = R_0 + R_0\alpha\beta\frac{U^2}{R}\,.$$

Môžeme si to upraviť do kvadratickej rovnice pre odpor ako

$$R^2 - RR_0 - R_0\alpha\beta U^2 = 0\,.$$

Riešenia tejto rovnice sú

$$R_{1,2} = \frac{R_0 \pm \sqrt{R_0^2 + 4R_0\alpha\beta U^2}}{2}\,.$$

Riešenie s mínusom nám dá záporný odpor, čo nedáva fyzikálny zmysel, navyše je to „nestabilná rovnováha“. Z tohto dôvodu zoberieme riešenie s plusom. Prúd potom bude

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2U}{R_0 + \sqrt{R_0^2 + 4R_0\alpha\beta U^2}} = \frac{\sqrt{R_0^2 + 4R_0\alpha\beta U^2} - R_0}{2R_0\alpha\beta U} \doteq 32\,\mathrm{A}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha DB ... trojsrážka

Dvě identické hladké koule s poloměry $r = 10\,\mathrm{cm}$ leží v klidu na vodorovném stole a jejich středy jsou ve vzdálenosti $d = 30\,\mathrm{cm}$. Třetí identická koule se přibližuje rychlostí $v = 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ po ose úsečky dané jejich středy. Všechny srážky jsou okamžité a dokonale pružné. Jaká bude rychlost přibližující se koule po srážkách? Zapište kladný výsledek, pokud půjde ve svém původním směru, a záporný, pokud půjde v opačném směru.

Lego chtěl vymyslet úlohu na Jardův způsob.

Keďže gule sú dokonale hladké, nie je medzi nimi žiadne trenie, tým pádom budú pri zrážke na seba pôsobiť iba normálovými silami. To znamená, že obe stojace gule odletia v smere, ktorý je daný spojnicou ich stredu a stredu prichádzajúcej gule. Tento smer dostaneme z pravouhlého trojuholníku, ktorého prepona je príslušná spojnica (dĺžka $2r$) a jedna odvesna je polovica úsečky medzi stojacimi guľami (dĺžka $d/2$). Na základe toho bude smer pohybu so smerom prichádzajúcej gule zvierať uhol

$$\varphi = \arcsin\frac{d}{4r}\,.$$

Zároveň zo symetrie je jasné, že prichádzajúca guľa sa bude po zrážke naďalej pohybovať buď v smere svojej pôvodnej rýchlosti, alebo v presne opačnom smere. Označme si túto rýchlosť v_1 (kde kladný smer je v smere jej pôvodnej rýchlosti). Zároveň zo symetrie vyplýva, že zvyšné dve gule budú mať navzájom rovnakú veľkosť rýchlostí, označme si ju ako v_2.

Potom zo zákona zachovania energie vyplýva

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}mv_2^2\,,$$
$$v^2 = v_1^2 + 2v_2^2\,.$$

A zo zákona zachovania hybnosti

$$mv = mv_1 + 2mv_2\cos\varphi\,,$$
$$v = v_1 + 2v_2\cos\varphi\,,$$

pretože zložky hybnosti v kolmom smere sa vyrušia. Vyjadríme si zo zákona zachovania hybnosti $v_1 = v - 2v_2 \cos\varphi$ a dosadíme do zákona zachovania energie

$$\begin{aligned} v^2 &= (v - 2v_2 \cos\varphi)^2 + 2v_2^2 \,, \\ v^2 &= v^2 - 4vv_2 \cos\varphi + 4v_2^2 \cos^2\varphi + 2v_2^2 \,, \\ 4v\cos\varphi &= 4v_2 \cos^2\varphi + 2v_2 \,, \\ \frac{2v\cos\varphi}{2\cos^2\varphi + 1} &= v_2 \,, \end{aligned}$$

kde sme sa riešenia $v_2 = 0$ zbavili, pretože to by zodpovedalo situácii, kedy ku žiadnej zrážke nedôjde. Zostáva dosadiť späť do zákona zachovania hybnosti a dostávame

$$v_1 = v - 2v_2 \cos\varphi = v - \frac{4\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi + 1} v = \frac{1 - 2\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi + 1} v \,.$$

Z goniometrie vyplýva $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, čiže

$$v_1 = \frac{d^2 - 8r^2}{24r^2 - d^2} v \doteq 0{,}067\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha DC ... Wattův magnetický regulátor

Uvažme klasický Wattův regulátor sestávající ze svislé osy, ke které jsou v jednom společném kloubu volně připevněna dvě nehmotná ramena délky $l = 30{,}0\,\mathrm{cm}$, na jejichž koncích jsou malá kulová závaží s hmotnostmi $m = 100\,\mathrm{g}$. Když se tato osa roztočí, ramena se začnou vlivem odstředivé síly zdvihat. V naší situaci jsou závaží navíc nabitá stejnými náboji $q = 2{,}00\,\mathrm{\mu C}$ a celý systém se nachází v homogenním magnetickém poli o hypotetické velikosti $B = 750\,\mathrm{kT}$ ve směru osy. Při jaké nejmenší velikosti úhlové rychlosti ω se ramena mohou rozepnout do úhlu $2\vartheta = 90{,}0^\circ$? *Petra baví magnetismus.*

Rozepíšeme si sílu působící na jedno závaží v jednotlivých směrech. Ve vertikálním směru na závaží působí pouze tíhová síla:

$$F_z = mg \,,$$

přičemž jsme si zvolili kladný směr osy směrem dolů. V radiálním směru musíme počítat s odstředivou, elektrostatickou a magnetickou silou – pro ty postupně platí

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{od}} &= m\omega^2 r \,, \\ F_{\mathrm{el}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2r)^2} \,, \\ F_{\mathrm{mag}} &= \pm q\omega r B \,, \end{aligned}$$

kde r je vzdálenost závaží od osy. Při odvození vztahu pro F_{mag} rovnici jsme využili vztah pro magnetickou sílu

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \,,$$

do kterého jsme dosadili vztah pro rychlost při pohybu po kružnici $v = \omega r$ a poté jsme si uvědomili, že se pohyb odehrává v horizontální rovině, na kterou je magnetické pole kolmé – vektorový součin se proto zjednoduší na součin klasický a výsledný vektor bude mířit v radiálním směru. Musíme zde také počítat s tím, že nevíme, kterým směrem míří magnetická indukce B a kterým směrem se regulátor bude otáčet, a tedy ani nevíme, kterým směrem bude magnetická síla působit (ačkoliv z požadavku na minimální rychlost otáčení tušíme, že se regulátor bude otáčet v takovém směru, aby výsledná síla mířila radiálně od osy otáčení). Z geometrie určíme, že $r = l \sin\vartheta$, proto pro celkovou radiální sílu dostáváme

$$F_\mathrm{r} = m\omega^2 l \sin\vartheta + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{4l^2\sin^2\vartheta} \pm q\omega l B \sin\vartheta\,.$$

Aby byla soustava v rovnováze, musí být směr výsledné síly rovnoběžný s ramenem, na kterém je závaží upevněno. Musí tedy platit

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{F_\mathrm{r}}{F_z}\,,$$

což po úpravě vede na kvadratickou rovnici

$$\omega^2 \pm \frac{qB}{m}\omega + \frac{q^2}{16\pi l^3 m\varepsilon_0}\frac{1}{\sin^3\vartheta} - \frac{g}{l}\frac{1}{\cos\vartheta} = 0\,,$$

jejímiž kořeny jsou

$$\omega = \begin{cases} \mp\left(\frac{qB}{2m} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q^2B^2}{m^2} - \frac{q^2}{4\pi l^3 m\varepsilon_0}\frac{1}{\sin^3\vartheta} + \frac{4g}{l}\frac{1}{\cos\vartheta}}\right) = \pm 2{,}15\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,,\\ \mp\left(\frac{qB}{2m} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q^2B^2}{m^2} - \frac{q^2}{4\pi l^3 m\varepsilon_0}\frac{1}{\sin^3\vartheta} + \frac{4g}{l}\frac{1}{\cos\vartheta}}\right) = \mp 17{,}1\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,. \end{cases}$$

Otázka ze zadání zněla, při jaké *nejmenší* velikosti rychlosti dojde k rozepnutí, správným řešením je tedy menší velikost rychlosti

$$|\omega| = 2{,}15\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha DD ... převrhlý vlak

Babička se dozvěděla o Coriolisově síle a při cestě vlakem z Prahy přesně na jih panikařila, že vagóny nesmí jet příliš rychle, aby se nepřevrhly. Vagón má obdélníkový průřez šířky $a = 3\,150\,\mathrm{mm}$ a výšky $b = 4\,320\,\mathrm{mm}$, s těžištěm uprostřed průřezu. Praha leží přibližně na 50° severní šířky. Jakou minimální rychlostí by vagón musel jet? Odhad postačí, relativistické efekty lze ignorovat. Výsledek uveďte na dvě platné cifry.

Nápověda: *Na těleso o hmotnosti m pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$ ve vztažné soustavě, která rotuje úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$, působí Coriolisova síla $\mathbf{F}_\mathrm{Cor} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$.*

Petr seděl ve vlaku, kde se děly divné věci.

Zajímá-li nás jen velikost Coriolisovy síly, stačí ve vztahu uvedeném v nápovědě uvážit místo vektorového součinu jednoduchý součin velikostí ω krát v krát sinus úhlů mezi nimi. Vektor $\boldsymbol{\omega}$

míří ve směru osy rotace, zeměpisná šířka se však měří od rovníku. Označme si úhel zeměpisné šířky

$$\vartheta = 50^\circ \,,$$

můžeme si pak rozmyslet, že úhel mezi vektory $\boldsymbol{\omega}$ a $\mathbf{v}$ je $\pi - \vartheta$, což nám po úpravě sinu a zanedbání znaménka, které jen udává orientaci síly, dává pro velikost Coriolisovy síly

$$F_{\mathrm{Cor}} = 2m\omega v \sin\vartheta \,.$$

Aby se vagón převrátil, musí moment síly, kterým na něj působí Coriolisova síla, vyrovnat moment síly, kterým na něj působí tíhová síla. Snadno si můžeme rozmyslet, že tíhová síla působí největším momentem síly v momentě, kdy vagón není jakkoliv nachýlený. To znamená, že nám stačí překonat tíhovou sílu jen na začátku převracení, pak už bude její vliv vždy jen menší. Označíme-li α úhel mezi úhlopříčkou průřezu vagónu a vertikální osou, musí platit

$$mg \sin\alpha = 2m\omega v \sin\vartheta \cos\alpha \,,$$

upravíme-li tento vztah, využijeme-li $\operatorname{tg}\alpha = a/b$ a vyjádříme-li $\omega = 2\pi/T$, kde T je perioda otáčení Země (tedy přibližně 24 h), dostáváme

$$v = \frac{gT}{4\pi} \frac{a}{b} \frac{1}{\sin\vartheta} \doteq 64\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}} \,.$$

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha DE ... Kam s ním?

Jan Neruda už má plné zuby svého starého slamníku. Místo toho, aby ho po troškách trousil při procházkách z nohavic, rozhodne se slamník svázat do malé kuličky hmotnosti $m = 20\,\mathrm{kg}$ a vystřelit ji z podomácku vyrobeného katapultu od svého domu v Konviktské ulici č. p. 30 do Vltavy. Řeka je vzdálená $L = 250\,\mathrm{m}$ a prostředních $13/15$ trasy je zastavěno domy výšky $h = 18\,\mathrm{m}$, které je potřeba přestřelit. Posledním krokem je vybrat do katapultu dostatečně tuhou pružinu, která výstřel nálože zařídí. Jaká minimální tuhost pružiny je třeba, umožňuje-li katapult její maximální natažení o $x = 1{,}25\,\mathrm{m}$? Katapultem je možné střílet pod libovolným úhlem. *Petr četl slavný Nerudův fejeton „Kam s ním?“.*

Uvažme parabolickou dráhu, po které slamník poletí. Položíme-li si počátek našich souřadnic doprostřed vzdálenosti, kterou musí přeletět, můžeme rovnici trajektorie napsat ve tvaru

$$y = -al^2 + H \,,$$

kde l je horizontální vzdálenost od prostředku dráhy, H je maximální výška, do které slamník vyletí a a je parametr udávající tvar paraboly. Protože je na začátku slamník na zemi, platí

$$0 = -a\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H \,.$$

Aby slamník při co možná nejmenší dosažené výšce H přeletěl řadu domů, které mu stojí v cestě, musí platit

$$h = -a\left(\frac{13}{30}L\right)^2 + H \,.$$

Máme tedy soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{225h}{14L^2} \doteq 4{,}63 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}\,,\\
H &= \frac{225h}{56} \doteq 72{,}32\,\mathrm{m}\,.
\end{aligned}
$$

Aby slamník do výšky H vyletěl, musí být jeho počáteční vertikální rychlost taková, aby (kvůli zákonu zachování energie) platilo

$$
\frac{1}{2}mv_y^2 = mgH \quad \Rightarrow \quad v_y = \sqrt{2gH}\,.
$$

Zároveň však potřebujeme, aby měl slamník na počátku vhodně velkou horizontální složku rychlosti – pokud bude mít nesprávnou, poletí po jiné než námi kýžené trajektorii. Správná horizontální rychlost je taková, že celková rychlost bude tečná na trajektorii. Víme, že tangens tečny ke grafu v daném bodě je roven derivaci v tomto bodě. Pro naší derivaci obecně, resp. konkrétně na začátku trajektorie platí

$$
y' = -2al \quad \Rightarrow \quad y'\left(-\frac{L}{2}\right) = aL\,,
$$

Využitím výše zmíněné vlastnosti derivace máme

$$
\frac{v_y}{v_x} = aL \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{\sqrt{2gH}}{aL}\,.
$$

Zde se ještě pozastavme nad jednou myšlenkou – pokud by platilo

$$
\left|\frac{v_y}{v_x}\right| < 1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\,,
$$

tedy pokud by takový výstřel, který by těsně přeletěl domy stojící mu v cestě, byl vystřelen pod úhlem menším než 45°, bylo by výhodnější slamník vystřelit prostě pod úhlem 45°, neboť při tomto úhlu je poměr dostřelu a potřebné energie optimální. V našem případě však platí $|aL| \doteq$ $\doteq 1{,}16$, což znamená, že chceme balík střílet pod úhlem, při kterém mezi poměrem v_x, v_y a aL platí rovnost.

Aby katapult dostřelil, musí být celou jeho počáteční kinetickou energii možné „uložit“ do natažené pružiny. Využitím vztahu pro potenciální energii pružiny tedy máme

$$
\frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) = \frac{1}{2}kx^2
$$

a odtud už vyjádřením tuhosti k a dosazením dostaneme

$$
k = \frac{225}{28}\frac{mgh}{x^2}\left(\frac{1 + a^2L^2}{a^2L^2}\right) \doteq 32\,\mathrm{kN{\cdot}m^{-1}}\,.
$$

Úloha čerpá z fejetonu Jana Nerudy, v němž autor pojednává o tom, jak se zbavit starého slamníku, který tehdy nebylo kam vyhodit. Autor navrhuje slamník například postupně trousit z nohavic.

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha DF ... ďábelská

V nejhlubší propasti pekla je uprostřed zamrzlé plochy zaražen sám Lucifer se třemi tvářemi, v každých ústech třímaje jednoho zrádce. Kolem něj je na ledu namalován pentagram tvořený kruhem poloměru R, v němž je vepsaná pravidelná pěticípá hvězda. Ve třech z vrcholů hvězdy se nachází náboj Q a ve třech z průsečíků hvězdy se nachází náboj q stejného znaménka. Jaký musí být poměr Q/q, aby ve středu pentagramu, kde se nachází Lucifer bylo nulové elektrické pole?

Petr kdysi četl Božskou komedii.

Ze zadání víme, že náboje Q jsou od středu pentagramu vzdáleny R. Nicméně ještě musíme určit, jak vzdálené jsou náboje q. Ty se nacházejí na nějaké menší kružnici, označme její poloměr a. Průsečíky pentagramu tvoří pravidelný pětiúhelník, rozdělíme-li ho na pět trojúhelníků, dostáváme, že jeden trojúhelník má u středu kruhu vrchol s úhlem $\alpha = 360^\circ/5 = 72^\circ$ a u zbylých dvou vrcholů je úhel $\beta = 54^\circ$. Uvažme útvar tvořený jedním cípem hvězdy a k němu přilehlým trojúhelníkem z vnitřního pětiúhelníku. Součet výšek těchto trojúhelníků je přesně R, všechny úhly uvnitř útvaru jsme schopni určit ze znalosti α a β. Použitím trochy trigonometrie a úpravou jsme pak schopni a vyjádřit jako

$$a = \frac{R}{\operatorname{tg} 72^\circ \cos 54^\circ + \sin 54^\circ}\,.$$

Rozmysleme si, jak budou náboje umístěny. Na jednom kruhu mohou být náboje rozmístěny buď tak, že spolu všechny tři sousedí, nebo že spolu sousedí dva a třetí je naproti jim. Tak či tak, ze symetrie můžeme uvážit, že na druhém kruhu musí být náboje uspořádány tak, jako kdybychom náboje na prvním kruhu souměrně zobrazili přes střed kruhu a přeškálovali na poloměr druhého kruhu. Když si pak vyjádříme elektrickou intenzitu ve středu kruhu, která bude součtem intenzit od nábojů na vnitřním kruhu $\mathbf{E}_q$ a od nábojů na vnějším kruhu $\mathbf{E}_Q$, potřebujeme takovou velikost nábojů, aby platila podmínka

$$\mathbf{E}_q + \mathbf{E}_Q = 0\,.$$

Ovšem, díky symetrii mají až na znaménko $\mathbf{E}_q$ i $\mathbf{E}_Q$ stejný tvar a liší se jen koeficientem Q/R^2, resp. q/a^2. Dostáváme tak

$$\frac{Q}{R^2} = \frac{q}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{q} = \left(\frac{R}{a}\right)^2 = \left(\operatorname{tg} 72^\circ \cos 54^\circ + \sin 54^\circ\right)^2 \doteq 6{,}85\,.$$

Zajímavé je také podotknout, že platí

$$\sqrt{\frac{R}{a}} = \varphi = 1{,}61803\ldots\,,$$

kde φ je zlatý řez.

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha DG ... korálek na parabole

Mějme korálek hmotnosti m volně navlečený na drátě tvaru grafu paraboly $y = ax^2$ v homogenním tíhovém poli. Drát roztočíme okolo osy („osy y“), která je rovnoběžná s $\mathbf{g}$. Jaká musí být úhlová rychlost ω, aby korálek při libovolném vychýlení po parabole neklouzal?

Petr vzpomínal na teoretickou mechaniku.

Vyjádřeme si vektorově síly, které na korálek působí. V x-ovém směru je to odstředivá síla a v y-ovém směru je to tíhová síla. Platí tak

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} m\omega^2 x \\ -mg \end{bmatrix} .$$

Korálek se může pohybovat jen po parabole. Aby se nepohyboval, musí výsledná síla na korálek působit ve směru normály na parabolu – pokud by tomu tak nebylo, tečná složka by způsobila, že by korálek po parabole „sklouznul“ jinam. Výsledná síla má směr normály právě tehdy, když je výsledná síla kolmá na tečnu k parabole. Tu si však umíme jednoduše vyjádřit pomocí derivace. Platí

$$y' = 2ax \,,$$

pro vektor ve směru tečny v bodě x tak platí

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2ax \end{bmatrix} .$$

Kolmost pak ověříme tím, že $\mathbf{v}$ a $\mathbf{F}$ musí mít nulový skalární součin. Podmínka na ω je tak

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = m\omega^2 x - 2mgax = 0 \,.$$

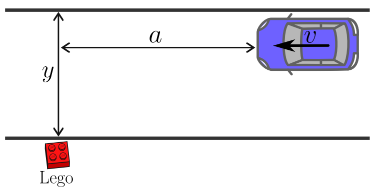
Z toho pak plyne

$$\omega = \sqrt{2ga} \,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha DH ... přebíhání před autem

Lego někdy přeběhne přes cestu příliš natěsno, tak si řekl, že tentokrát si radši všechno spočítá pro případ, že by auto řídil Radek, který kvůli chodcům nezpomaluje. Situace je zakreslena na obrázku. Jakou minimální rychlostí musí Lego běžet, aby přeběhl před autem? Lego nemusí nutně běžet kolmo k silnici. Výsledek vyjádřete jako funkci veličin v, y, a.



Než si to Lego spočítal, bylo auto samozřejmě pryč.

Zadanie spomína, že Lego nemusí bežať kolmo k ceste. Bežať smerom k autu sa mu avšak zrejme neoplatí, preto si označme vzdialenosť medzi najbližším bodom na opačnej strane cesty a bodom, kam dobehne ako x. Ak dobehne do tohto bodu skôr ako auto, tak môžeme tvrdiť, že ho stihol predbehnúť. Zároveň môžeme predpokladať, že Lego pobeží pomalšou rýchlosťou, než je rýchlosť auta. Z toho dôvodu, ak ho auto nedobehlo v tomto bode, nedobehlo ho ani predtým. Nie je tým pádom ani dôvod, aby Lego nejako kľučkoval, ide len o to, čo najskôr dôjsť do tohto konkrétneho bodu.

Vzdialenosť auta k bodu, kde Lego opustí cestu je $a + x$, čiže auto tam bude za čas $(a + x)/v$. Legova vzdialenosť k tomuto bodu je $\sqrt{x^2 + y^2}$, a preto musí bežať rýchlosťou $v_\mathrm{L} = v\sqrt{x^2 + y^2}/(a + x)$.

Zostáva prísť na to, pre ktoré x je potrebná rýchlosť najmenšia. Na zistenie tejto rýchlosti zderivujeme v_L podľa x

$$\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{L}}{\mathrm{d}x} = v\frac{\frac{x(a+x)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2}}{(a + x)^2}\,,$$

a hľadáme, kde sa derivácia rovná 0. To nastane práve vtedy, keď je čitateľ nulový

$$\frac{x\,(a + x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} = 0\,,$$

$$xa + x^2 = x^2 + y^2\,,$$

$$x = \frac{y^2}{a}\,.$$

Dosadíme späť do vyjadrenia potrebnej rýchlosti

$$v_\mathrm{L} = v\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a + x} = v\frac{\sqrt{\frac{y^4}{a^2} + y^2}}{a + \frac{y^2}{a}} = v\frac{y\sqrt{y^2 + a^2}}{a^2 + y^2} = v\frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}}\,.$$

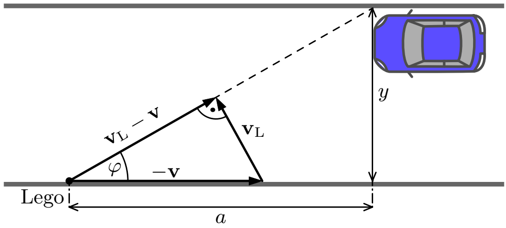
Riešenie vo vzťažnej sústave auta

Túto úlohu vieme elegantne riešiť tiež vo vzťažnej sústave auta. V tej sa poloha auta po celý čas nebude meniť. Zaveďme os x rovnobežne s cestou tak, aby sa auto nachádzalo na súradnici $x = 0$ Lego na začiatku na súradnici $x = a$. Lego stihne cez cestu prebehnúť práve vtedy, ak sa bude počas celého svojho pohybu nachádzať na nezápornej x-ovej súradnici.

Hraničným prípadom bude, podobne ako v predošlom riešení, taký pohyb, pri ktorom Lego dôjde na druhú stranu cesty v rovnakom okamihu, ako sa na tom istom mieste ocitne aj auto. Lego sa tak na druhej strane cesty bude v tomto hraničnom prípade nachádzať práve na súradnici $x = 0$. Keďže sa Legovi neoplatí kľučkovať v sústave spojenej s ním, tak aj jeho trajektória vo vzťažnej sústave auta bude určite rovná úsečka.

Vieme tak už presne nakresliť trajektóriu Legovho pohybu v sústave spojenej s autom – stačí nám úsečkou spojiť Legovu počiatočnú polohu a polohu auta na druhej strane cesty. Presne tento smer tak musí mať aj Legova rýchlosť vo vzťažnej sústave auta. Ďalej tiež vieme, že Legov vektor rýchlosti v tejto vzťažnej sústave vieme rozložiť na súčet vektora rýchlosti $\mathbf{v}_\mathrm{L}$, ktorou sa pohyboval v vzťažnej sústave zeme, a vektora rýchlosti $-\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je vektor rýchlosti auta takisto vo vzťažnej sústave zeme.

Toto sčítanie vektorov vieme urobiť graficky, ako na obrázku nižšie. Vieme, že výslednica $-\mathbf{v} + \mathbf{v}_\mathrm{L}$ musí udávať priamku spájajúcu Lega a predok auta. Máme teda priamku a bod (koniec vektora $-\mathbf{v}$), ktoré chceme spojiť najkratšou možnou úsečkou. A to je práve kolmica na danú priamku z konca vektora $-\mathbf{v}$.



Takto už dostávame geometricky dvojicu pravouhlých trojuholníkov s jedným spoločným uhlom φ. Preponu trojuholníka, po ktorej sa Lego pohybuje, vieme ľahko z Pythagorovej vety dopočítať ako $\sqrt{y^2+a^2}$. Odtiaľ už dostávame pre veľkosti jednotlivých rýchlostí a pomery dĺžok strán v daných trojuholníkoch rovnicu

$$\sin\varphi = \frac{v_{\mathrm{L}}}{v} = \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\,,$$

čiže minimálna rýchlosť, ktorou sa Lego musí pohybovať, je

$$v_{\mathrm{L}} = v\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Tomáš Kubrický
`tomas.kubricky@fykos.cz`

Úloha EA ... rozpad kaonu

Částice kaon s celkovou energií $E_{\mathrm{K}} = 500\,\mathrm{MeV}$ se rozpadne na dva identické piony se stejnou energií. Jaký bude úhel α mezi směry, do kterých se piony rozlétnou? Klidová hmotnost kaonu je $m_{\mathrm{K}} = 498\,\mathrm{MeV}/c^2$ a klidová hmotnost pionu je $m_{\pi} = 135\,\mathrm{MeV}/c^2$.
Nápověda: *Jistě znáte proslulý vztah $E = mc^2$. Ten lze ale také přepsat do podoby $E = \sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}$, kde m_0 je klidová hmotnost. Využijte toho.*

Petr se cvičil v částicové fyzice.

Energii pionu si označme E_{π}, hybnosti pionů $\mathbf{p}_{\pi,1}$ a $\mathbf{p}_{\pi,2}$. Nejprve si upravíme jednotky. V částicové fyzice se obvykle používají přirozené jednotky, ve kterých pokládáme $c = 1$ a hmotnost a hybnost píšeme v jednotkách energie. Přeznačíme si

$$m \equiv m_0c^2\,,$$
$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}c\,,$$

konkrétně pro klidové hmotnosti kaonu a pionu máme

$$m_{\mathrm{K}} = 498\,\mathrm{MeV}\,,$$
$$m_{\pi} = 135\,\mathrm{MeV}\,.$$

Díky vztahu

$$E = \sqrt{m^2+p^2}$$

a tomu, že piony mají stejnou energii, jistě víme, že piony musejí mít stejnou velikost hybnosti, kterou označíme jednotně p_π. Zákon zachování hybnosti nám navíc dává

$$\mathbf{p}_\mathrm{K} = \mathbf{p}_{\pi,1} + \mathbf{p}_{\pi,2}\,,$$
$$p_\mathrm{K}^2 = 2p_\pi^2 + 2p_\pi^2\cos\alpha\,.$$

V druhé rovnici jsme si spočítali kvadrát velikosti hybnosti a využili vztahu $\mathbf{p}_{\pi,1}\cdot\mathbf{p}_{\pi,2} = p_\pi^2\cos\alpha$. Z toho si vyjádříme

$$p_\pi^2 = \frac{p_K^2}{2\,(1+\cos\alpha)}\,.$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$E_\mathrm{K}^2 = (2E_\pi)^2 \quad\Rightarrow\quad E_\mathrm{K}^2 = 4\left(m_\pi^2 + p_\pi^2\right)\,,$$

z čehož po dosazení za p_π^2 můžeme vyjádřit

$$\cos\alpha = \frac{E_\mathrm{K}^2 - 2m_\mathrm{K}^2 + 4m_\pi^2}{E_\mathrm{K}^2 - 4m_\pi^2}\,.$$

Dosazením a inverzí kosinu máme

$$\alpha \doteq 168^\circ\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha EB ... tři koule

Mějme tři ocelové koule s hmotnostmi $m = 300\,\mathrm{g}$ uchycené na nehmotných provazech délky $L = 75\,\mathrm{cm}$, jejichž druhé konce jsou spojeny v jednom bodě. Každou z koulí nabijeme nábojem $q = 5{,}0\,\mathrm{\mu C}$. Když celý systém zavěsíme za bod, ve kterém jsou provazy spojené, jaká bude plocha vodorovného trojúhelníka, který koule vytvoří? Nebojte se úlohu řešit přibližně nebo numericky.

Petr vzpomínal na kurz elektromagnetismu.

Ze symetrie jistě víme, že trojúhelník bude rovnostranný. Označme si délku jeho strany jako a. Každý náboj pak na každý jiný působí silou

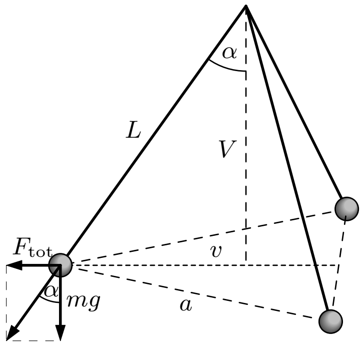
$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2} = \frac{kq^2}{a^2}$$

ve směru od středu trojúhelníku. Síla na jeden náboj však nebude jednoduše dvojnásobkem velikosti síly od jednoho jiného náboje – složky síly působící proti sobě se díky symetrii vynulují a zbyde složka ve směru osy nábojů. Ta bude mít velikost

$$F_\mathrm{tot} = 2F_\mathrm{e}\cos 30^\circ = \frac{kq^2\sqrt{3}}{a^2}\,.$$

Aby byl systém v rovnováze, musí být délka a taková, aby výsledná síla na kouli byla ve směru napnutí provazu. Pokud by nebyla, bude na koule působit nulový moment síly a v rovnováze tedy nebudou. Pro výšku trojúhelníka platí

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}a\,,$$



Obrázek 2: Nákres systému v rovnovážném stavu a sil působících na jednu z koulí.

pro tělesovou výšku vzniklého jehlanu zase platí

$$V = \sqrt{\frac{3L^2 - a^2}{3}}\,.$$

Zde jsme využili vlastnosti rovnostranného trojúhelníka – střed jeho kružnice opsané (splývající s těžištěm a středem kružnice vepsané) se nachází ve 2/3 výšky od vrcholu. Výše zmíněná podmínka na sílu nám tak dává

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{kq^2\sqrt{3}}{a^2}}{mg} = \frac{a}{\sqrt{3L^2 - a^2}}\,,$$

kde α je úhel, o který se provazy odchýlí od vertikální osy. Úpravou a označením $b \equiv a^2$ získáváme kubickou rovnici

$$b^3 + b\frac{3q^4}{16\pi^2 m^2 g^2 \varepsilon_0^2} - \frac{9q^4L^2}{16\pi^2 m^2 g^2 \varepsilon_0^2} = 0\,,$$
$$\frac{m^2g^2}{3k^2q^4}b^3 + b - 3L^2 = 0\,.$$

Tu můžeme vyřešit numericky na kalkulačce. Protože jde o rovnici, ze které umíme snadno vyjádřit b, nabízí se nám použití iterační metody. Ta je založena na tom, že rovnici upravíme do tvaru $b = f(b)$, a potom opakovaně dosazujeme poslední spočtený výsledek b' zpět do funkce f, dokud se výsledek nepřestane výrazněji měnit. Máme dvě možnosti, jak to udělat – buď si vyjádříme b z lineárního, nebo z kubického členu. Kdybychom si b vyjádřili z lineárního členu, velmi rychle bychom přišli na to, že daná posloupnost při iterování nebude konvergovat. Vyplatí se proto vyjádřit si b z kubického členu

$$b = \sqrt[3]{\frac{C - b}{A}} \equiv f(b)\,,$$

kde

$$A = \frac{m^2g^2}{3k^2q^4} \doteq 57{,}184\,\mathrm{m^{-4}}\,,$$
$$C = 3L^2 \doteq 1{,}687\,5\,\mathrm{m^2}\,.$$

Na kalkulačce lze iteraci provést efektivně tak, že si za b nejprve dosadíme nějaký počáteční tip (např. 0,1), výraz vyčíslíme a každý výskyt b na pravé straně rovnice nahradíme kalkulačkovým `ANS`

$$\mathtt{ANS}_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{C - \mathtt{ANS}_n}{A}}\,,$$

kde $\mathtt{ANS}_n$ je výsledek po n-té iteraci (po n-tém zmáčknutí `=`). Po několika iteracích tak dostáváme

$$b \doteq 0{,}290\,2\,\mathrm{m^2}\,.$$

Obsah trojúhelníku je potom

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}b \doteq 0{,}13\,\mathrm{m^2}\,.$$

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Vladimír Slanina
`vladimir.slanina@fykos.cz`

Úloha EC ... zmenšený Měsíc

Ve filmu Já padouch *hlavní postava Gru zmenší Měsíc a ukradne ho. Představte si, že by Gru místo krádeže Měsíc jen instantně zmenšil, a to tak, aby pro poměr nové a původní hmotnosti platilo $m/M = 4/5$; směr a velikost jeho celkové hybnosti by však zachoval a nechal by ho vesele obíhat dále kolem Země. Jaká by byla jeho nová perioda oběhu τ? Uvažujte, že Měsíc Zemi obíhá po kruhové dráze o poloměru $R = 3{,}844 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ a že hmotnost Měsíce je výrazně menší, než hmotnost Země.*

Petr koukal na Mimoně.

Nejprve využijeme zákona zachování energie, který můžeme pro zmenšený Měsíc psát ve tvaru

$$\frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2 - \frac{GmM_\oplus}{r} = E\,.$$

Protože se bude zachovávat hybnost, můžeme určit rychlost Měsíce hned poté, co je změněna jeho hmotnost:

$$mv = MR\frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2\pi}{T}\frac{M}{m}R\,.$$

Periodu T si zde můžeme vyjádřit z 3. Keplerova zákona. Ten nám říká, že pro libovolné těleso obíhající kolem jiného (značně těžšího) tělesa platí

$$\frac{a^3}{T^2} = \mathrm{konst.}\,,$$

kde T je oběžná perioda a a je hlavní poloosa elipsy, po které těleso obíhá. Neznámou konstantu si můžeme spočítat z toho, že stejný vztah platí i pro kruhovou dráhu, kdy se gravitační síla vyrovná s odstředivou a platí $a = R$; to popíšeme rovnicemi jako

$$m\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)R = \frac{GmM_\oplus}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_\oplus}{4\pi^2}\,,$$

odkud dostáváme

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_\oplus}}R^{3/2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}}\left(\frac{M}{m}\right).$$

Díky tomu si můžeme vyjádřit konstantu[1] E/m jako

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}\frac{GM_\oplus}{R}\left(\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 2\right).$$

V polárních souřadnicích můžeme pro druhou mocninu velikosti rychlosti obecně psát

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\,,$$

kde $\dot{r}^2$ a $r^2\dot{\varphi}^2$ jsou postupně okamžité velikosti radiální a oběhové rychlosti. Můžeme si uvědomit, že v momentu, kdy se Měsíc nachází v perigeu nebo apogeu, je radiální složka rychlosti nulová. V perigeu nebo apogeu tak máme ze zákona zachování energie rovnici

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{GmM_\oplus}{r} = E \quad \Rightarrow \quad r^3\dot{\varphi}^2 - \frac{2E}{m}r - 2GM_\oplus = 0\,.$$

Vyjádřeme si nyní okamžitou úhlovou rychlost $\dot{\varphi}$. 2. Keplerův zákon (resp. zákon zachování momentu hybnosti) nám říká, že platí

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{\pi R^2}{T}\frac{M}{m} = \text{konst.}$$

a my si tak můžeme vyjádřit

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T}\frac{M}{m}\frac{R^2}{r^2} = \frac{M}{m}\frac{\sqrt{GM_\oplus R}}{r^2}\,.$$

Když toto dosadíme do vztahu, který jsme dostali výše ze zákona zachování energie v perigeu nebo apogeu, dostáváme pro r kvadratickou rovnici

$$r^2 + \frac{2R}{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 2}r - \frac{\left(\frac{M}{m}\right)^2 R^2}{\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 2} = 0\,,$$

jejímž řešením jsou

$$r = \begin{cases} \frac{(M/m)^2}{2-(M/m)^2}R = 1{,}373 \cdot 10^9\ \text{m} \\ R = 3{,}844 \cdot 10^8\ \text{m} \end{cases}$$

Všimněme si, že jeden z výsledků odpovídá původní vzdálenosti Měsíce od Země R – tedy hned po změně hmotnosti bude Měsíc v perigeu. Toho jsme si mohli všimnout už dříve, protože

[1] Jedná se skutečně o konstantu, protože se zachovává energie.

hned po změně hmotnosti měl nulovou radiální složku rychlosti. Dále proto bude r označovat pouze vzdálenost v apogeu; pak můžeme určit velikost hlavní poloosy elipsy, po které Měsíc nově obíhá, jako

$$a = \frac{r + R}{2} = \frac{1}{2 - \left(\frac{M}{m}\right)^2} R = \frac{16}{7} R \,.$$

Tento výsledek nyní můžeme dosadit do třetího Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{GM_\oplus}{4\pi^2} \,,$$

odkud vyjádřením τ dostáváme

$$\tau = \left(\frac{16}{7}\right)^{3/2} T = \left(\frac{16}{7}\right)^{3/2} \frac{2\pi}{\sqrt{GM_\oplus}} R^{3/2} \doteq 94{,}9\,\mathrm{d} \,.$$

Riešenie využitím rovnice vis-viva

Mesiac pred zmenšením obiehal rýchlosťou

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T} \quad \Rightarrow \quad v_0^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{GM_\oplus}{R} \,,$$

kde sme pri úpravách využili 3. Keplerov zákon

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_\oplus}{4\pi^2} = \mathrm{konst.} \,.$$

Rýchlosť v_0 sa takisto zvykne označovať aj ako *1. úniková rýchlosť*.

Podľa zadania sa pri zmenšení zachováva hybnosť, teda pre hmotnosť m a rýchlosť po zmenšení v_1 platí

$$v_1 m = v_0 M \,.$$

Potom úpravami dostávame:

$$v_1 = \frac{M}{m} v_0 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = \left(\frac{M}{m}\right)^2 v_0^2 = \left(\frac{M}{m}\right)^2 \frac{GM_\oplus}{R} \,.$$

Pre pohyb po eliptických a hyperbolických dráhach platí rovnica vis-viva

$$v^2 = G\mathcal{M} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \,,$$

ktorá udáva vzťah medzi všeobecnou vzdialenosťou r od centrálneho telesa s hmotnosťou $\mathcal{M} \gg m$ na orbite s veľkou poloosou a (pre hyperbolické dráhy má táto poloos záporné znamienko) a veľkosťou rýchlosti v v danom okamihu. V našom prípade obieha Mesiac okolo Zeme s hmotnosťou $M_\oplus$, v okamihu zmenšenia má rýchlosť v_1 a vzdialenosť R od Zeme, preto platí

$$GM_\oplus \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right) = v_1^2 = \left(\frac{M}{m}\right)^2 \frac{GM_\oplus}{R}$$

a po úpravách

$$a = \frac{R}{2 - \left(\frac{M}{m}\right)^2} = \frac{16}{7} R \,.$$

Tento výsledok je konzistentný s predchádzajúcim postupom.

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Vladimír Slanina
`vladimir.slanina@fykos.cz`

Úloha ED ... antireflexní vrstva

Abychom zabránili tomu, že se nám od brýlí bude odrážet světlo (což například nevypadá dobře na fotkách), můžeme na ně nanést antireflexní vrstvu. Představme si, že chceme nanést antireflexní vrstvu z materiálu s indexem lomu $n = 1{,}38$ na brýle s indexem lomu $N > n$. Jaká musí být nejmenší tloušťka vrstvy d, aby se při kolmém odrazu žádné světlo neodráželo, uvažujeme-li pouze jeden odraz? Počítejte s obvyklou vlnovou délkou $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$.

Petr chce vypadat hezky na fotkách.

Díky tomu, že $N > n$ a $n > n_0$ se nám při obou odrazech – na skle brýlí a na antireflexní vrstvě – změní fáze o π. Když pak budou spolu odražené paprsky interferovat, bude fázový rozdíl vlivem odrazu $\pi - \pi = 0$, díky čemuž nebude hrát roli. Potřebujeme, aby při průběhu antireflexní vrstvou vlnění nabralo fázové zpoždění $(2p+1)\pi$, kde $p \in \mathbb{N}_0$ – pak bude vlnění prošlé antireflexní vrstvou a odražené zpátky přesně v protifázi s tím, které se odrazí od antireflexní vrstvy a destruktivně s ním zinterferuje. Při průchodu antireflexní vrstvou paprsek urazí dráhu $2d$, optická dráha tedy bude $2dn$. Potřebujeme tedy

$$2dnk = (2p+1)\,\pi\,,$$

kde k je vlnové číslo ve vakuu. To můžeme vyjádřit pomocí vlnové délky λ jako

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad 2dn\frac{2}{\lambda} = (2p+1)\ .$$

Nejtenčí vrstvu dostaneme, pokud bude fázový rozdíl nejmenší, tedy $p = 0$. Dosazením za k, p a vyjádřením d pak máme

$$d = \frac{\lambda}{4n} \doteq 99{,}6\,\mathrm{nm}\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha EE ... pevně spojená fyzikální kyvadla

Mějme dvě hůlky o délce $l = 15\,\mathrm{cm}$, které obě visí za jeden svůj konec a mohou se okolo bodu zavěšení volně otáčet. Tyto body závěsu jsou ve shodné výšce, jejich vzájemná vzdálenost je rovna l a volné konce hůlek jsou spojeny hůlkou také o délce l. Všechny tři hůlky mají hmotnost $m = 300\,\mathrm{g}$. Jaká bude perioda malých kmitů, pokud systém rozkýváme v rovině, ve které hůlky leží? Systém se nachází v tíhovém poli se zrychlením g.

Lego zfyzikálnil svou úlohu.

Keďže sústava pozostáva z troch samostatne pohybujúcich sa častí vykonávajúcich rôzny harmonický pohyb, nevyužijeme bežný postup využívajúci pohybovú rovnicu, ale radšej sa zameriame na energie. Vyjadríme si preto potenciálnu a kinetickú energiu ako funkcie vychýlenia zvislých paličiek φ a ich uhlovej rýchlosti $\dot{\varphi}$.

Keď sú visiace paličky vychýlené o uhol φ voči zvislému smeru, sú stredy (ťažiská) dvoch visiacich paličiek zdvihnuté o $(l/2)(1-\cos\varphi)$ od rovnovážnej polohy a spájajúca palička je zdvihnutá o $l(1-\cos\varphi)$. Celkovo je potenciálna energia

$$E_\mathrm{p} = mgl\left(2\frac{1}{2}+1\right)(1-\cos\varphi) \approx 2mgl\frac{\varphi^2}{2}\,,$$

kde sme rozvinuli kosínus do druhého rádu Taylorovho rozvoja ako $\cos\varphi \approx 1 - \varphi^2/2$.

Visiace paličky sa otáčajú okolo svojho bodu uchytenia, okolo ktorého majú moment zotrvačnosti $ml^2/3$, čiže keď sa pohybujú uhlovou rýchlosťou $\dot{\varphi}$, kinetická energia každej z nich bude

$$\frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2\,.$$

Spájajúca palička sa neotáča, je celý čas vodorovne, tým pádom stačí použiť vzorec pre translačnú kinetickú energiu pre rýchlosť jej ťažiska. Ťažisko sa pohybuje po kružnici s polomerom l uhlovou rýchlosťou $\dot{\varphi}$, čiže rýchlosťou $l\dot{\varphi}$. Potom kinetická energia je $(1/2)ml^2\dot{\varphi}^2$. Celkovo je kinetická energia

$$E_\mathrm{k} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{5}{6}ml^2\dot{\varphi}^2\,.$$

Teraz podľa analógie s lineárnym harmonickým oscilátorom upravíme energie na tvar

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}k_\mathrm{ef}q^2\,,$$
$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_\mathrm{ef}\dot{q}^2\,,$$

čím dostaneme, že efektívna tuhosť nášho kyvadla je $k_\mathrm{ef} = 2mgl$ a efektívna hmotnosť $m_\mathrm{ef} = 5ml^2/3$. Keďže ako súradnicu používame uhol, majú tieto dve veličiny rozmer direkčného momentu resp. momentu zotrvačnosti. Každopádne zostáva dosadiť do vzorca pre periódu malých kmitov

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_\mathrm{ef}}{k_\mathrm{ef}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{3}ml^2}{2mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{6g}} \doteq 0{,}71\,\mathrm{s}\,.$$

Nakoniec poznamenajme, že úloha sa dala riešiť aj bežným postupom pre fyzikálne kyvadlo, pretože pohyb jednotlivých komponentov je nezávislý od ich polohy. Môžeme si ich preto virtuálne presunúť tak, aby boli ich osi otáčania v jednom spoločnom bode. Takéto výsledné kyvadlo by malo hmotnosť $M = 3m$ a celkový moment zotrvažnosti $I = ml^2/3 + ml^2/3 + ml^2 = 5ml^2/3$ (keďže sa vodorovná palička neotáča, má moment zotrvačnosti hmotného bodu). Vzdialenosť ťažiska tohto kyvadla od spoločnej osi by sa spočítala ako priemer vzdialeností ťažísk jednotlivých komponentov $L = (l/2 + l/2 + l)/3 = 2l/3$. Tieto hodnoty opäť stačí dosadiť do tabuľkového vzťahu a dostaneme rovnaký výsledok ako predchádzajúcim postupom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{6g}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha EF ... uvnitř zářivé koule

Představte si, že se nacházíte uvnitř prázdné sféry o poloměru Slunce $R_\odot$ ve vzdálenosti $R_\odot/2$ od jejího středu. Stěny sféry mají teplotu povrchu Slunce $T = 5\,800\,\mathrm{K}$. Určete velikost a směr síly, kterou na vás působí tlak záření vyzařovaného stěnami. Své tělo aproximujte koulí s průřezem $S = 0{,}70\,\mathrm{m}^2$ a s hmotností $m = 70\,\mathrm{kg}$ a předpokládejte, že absorbujete $\eta = 55\,\%$ dopadajícího záření. Uvažujte, že element sféry vyžaruje izotropně.

Vlado off-topicoval na vánočním posezení.

Uvažujme element sféry, ktorý vyžaruje izotropne. Intenzita žiarenia I tohto elementu klesá podľa zákona prevrátených štvorcov, ktorý hovorí, že I klesá s druhou mocninou vzdialenosti od zdroja

$$I \propto r^{-2}\,.$$

Sila, ktorou pôsobí žiarenie na teleso, je spôsobená zmenou hybnosti fotónov pri zrážke s daným telesom. Pri úplnom pohltení fotónov ide o perfektne neelastickú zrážku a pri úplnom odraze ide o perfektne elastickú zrážku. Tlak žiarenia $\mathcal{P}$ (sila žiarenia na jednotku plochy) bude preto úmerný zmene hybnosti fotónov p, a teda[2]

$$\mathcal{P} \propto \Delta p \propto p \propto E_{\text{fotón}} \propto I \propto r^{-2}\,.$$

Tlak žiarenia, ktoré vyžaruje element povrchu gule je úmerný r^{-2}. Pre presné odvodenie sily, ktorou pôsobí žiarenie na teleso, by sme museli zohľadniť geometriu telesa a vypočítať osobitne vplyv pohlteného a odrazeného svetla, ale všetky tieto efekty sú vo výsledku úmerné $\mathcal{P}$, čiže platí $F \propto \mathcal{P} \propto r^{-2}$. Táto úloha je tým pádom matematicky ekvivalentná hľadaniu sily, ktorou pôsobí nabitá sféra na teleso v jej vnútri, ktoré je nabité nábojom s rovnakým znamienkom. Podľa Gaussovho zákona je táto sila nulová, teda

$$F = 0\,\mathrm{N}\,.$$

Vladimír Slanina
`vladimir.slanina@fykos.cz`

Úloha EG ... to je nejlepší pirát, jakého jsem poznal

Jack Sparrow pluje rychlostí v_0 do přístavu na proděravělé lodi. Voda do ní vniká konstantním tokem Q, její celkový objem je V a i s pirátem má hmotnost m_0. Zatím vodu stíhá vylévat ven pomocí vědra, ale aby si zachoval svou pirátskou auru, hodlá s tím v jistou chvíli přestat a nechat loď volně doplout až k molu, načež se loď potopí. V jaké vzdálenosti od mola má vodu přestat vylévat? Odporové síly neuvažujte.

„Zřejmě to tak je," řekl Petr.

Kvůli tomu, že do lodi natéká voda, bude její hmotnost v čase t od ukončení vylévání rovna

$$m(t) = m_0 + Q\rho t\,.$$

Z Archimédova zákona víme, že vztlaková síla působící na loď je úměrná objemu, který je pod vodu ponořený. Největší bude, pokud bude celá loď ponořená, tedy

$$F_{\max} = V\rho g\,.$$

[2] Úplne odvodenie tohto vzťahu je v úlohe *odpudivé světlo*.

Aby se loď nepotopila, musí maximální vztlaková síla vždy převažovat tíhovou, tedy musí platit

$$V\rho g - (m_0 + Q\rho t)\, g \geq 0\,.$$

Z toho máme v mezním případě, kdy se síly přesně vyrovnají pro mezní čas T, podmínku

$$T = \frac{V\rho - m_0}{\rho Q}\,.$$

Za čas T od okamžiku, kdy Jack Sparrow přestane vylévat natékající vodu, musí loď překonat vzdálenost d a dorazit k molu. Nicméně, protože mění svou hmotnost, bude se měnit i její rychlost. Zákon zachování hybnosti nám dává

$$m_0 v_0 = m(t)\, v(t)\ ,$$

z čehož si pomocí znalosti $m(t)$ můžeme vyjádřit časovou závislost rychlosti lodi $v(t)$ jako

$$v(t) = \frac{m_0 v_0}{m_0 + Q\rho t}\,.$$

Tu nám nyní stačí jen zintegrovat od počátečního času 0 až do času T. Máme

$$d = \int_0^T \frac{m_0 v_0}{m_0 + Q\rho t}\,\mathrm{d}t\,,$$

$$u = m_0 + Q\rho t \quad \Rightarrow \quad d = \frac{m_0 v_0}{Q\rho} \int_{m_0}^{m_0 + Q\rho T} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\,,$$

$$d = \frac{m_0 v_0}{Q\rho} \left[\ln u\,\right]_{m_0}^{m_0 + Q\rho T}\ ,$$

což nám po dosazení za T dává

$$d = \frac{m_0 v_0}{Q\rho} \ln\left(\frac{V\rho}{m_0}\right)\,.$$

Jednou z chyb, kterou bychom mohli při řešení udělat, je předpokládat zachování energie, které ovšem neplatí, tedy

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 \neq \frac{1}{2} m v^2\,.$$

Je tomu tak proto, že voda se s lodí vlastně dokonale nepružně sráží.

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha EH ... grilovaný Říman po sicilsku

Archimédés měl údajně na obranu Syrakus sestavit stroj z leštěných měděných zrcadel, který měl zapálit nepřátelské lodě.

Představme si takový stroj, který se v naší rekonstrukci skládá z měděného plátu prohnutého do tvaru paraboly dané rovnicí ve tvaru $\eta = \pi\xi^2$, kde π je nějaký parametr. Velikost parametru π, a tedy i zaměření „zrcadla“ můžeme měnit otáčením klikou, přičemž otočení kliky souvisí s parametrem π lineárně jako $\pi = \alpha\vartheta + \vartheta_0$, kde ϑ je otočení kliky v radiánech a $\alpha = 2{,}0 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^{-1} \cdot rad^{-1}}$. Nepřátelskou loď je potřeba zaměřit, tedy umístit do ohniska paraboly.

Ta se k nám přitom blíží rovnoměrně přímočaře rychlostí $\nu = 15\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a v čase $\tau_0 = 0$ je zaměřena ve vzdálenosti $\varphi_0 = 1{,}0\,\mathrm{km}$. Jakou rychlostí musíme klikou otáčet v čase $\tau = 3{,}0\,\mathrm{min}$, aby loď zůstala zaměřená?

Petr sledoval video o punských válkách.

V první fázi bychom měli zjistit, jak souvisí vzdálenost ohniska φ s jediným parametrem paraboly, kterým je π. Pokud tuto souvislost neznáme, nevadí – odvodíme si ji. Parabola je definována jako křivka, jejíž všechny body jsou ve stejné vzdálenosti od ohniska Φ a tzv. řídící přímky. Zaveďme si souřadnou soustavu $[\xi, \eta]$ s počátkem ve vrcholu našeho zrcadla a s osou η směrem k lodi. V naší situaci pak Φ leží v bodě $\Phi = [0, \varphi]$. Řídící přímka má rovnici $\eta = -\varphi$, což jednoduše zjistíme z toho, že bod $[0, 0]$ od ní musí být vzdálený φ a musí ležet pod parabolou. Mějme bod na parabole $A = [\xi, \eta]$ a bod na řídící přímce kolmo pod ním B. Pro velikost vzdáleností $|\Phi A|$ a $|AB|$ platí

$$|\Phi A| = \sqrt{\xi^2 + (\eta - \varphi)^2}\,,$$
$$|AB| = (\eta + \varphi)\ .$$

Z definice paraboly musí platit rovnost

$$|\Phi A| = |AB|\ ,$$

která nám použitím vztahů výše, dosazením za η a vyjádřením φ dává

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\,.$$

Vzdálenost místa, kde bychom chtěli mít ohnisko, se v čase vyvíjí jako

$$\varphi = \varphi_0 - \nu\tau\,,$$

Dosazením do vztahu pro φ výše za π zjistíme, že platí

$$\varphi = \frac{1}{4\left(\alpha\vartheta + \vartheta_0\right)}\,.$$

Máme tak rovnost

$$\frac{1}{4\left(\alpha\vartheta + \vartheta_0\right)} = \varphi_0 - \nu\tau\,.$$

Vyjádřením úhlu pootočení kliky ϑ máme pro časovou závislost

$$\vartheta(\tau) = \frac{1}{4\alpha\left(\varphi_0 - \nu\tau\right)} - \frac{\vartheta_0}{\alpha}\,.$$

Abychom zjistili požadovanou úhlovou rychlost otáčení kliky ω, stačí tuto rovnici zderivovat podle času a máme

$$\omega = \dot{\vartheta} = \frac{\nu}{4\alpha}\frac{1}{\left(\varphi_0 - \nu\tau\right)^2}$$

a dosazením zadaných hodnot dostáváme

$$\omega \doteq 0{,}83\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha FA ... hvězdodrap

Marek chce postavit v zeměpisné šířce $\varphi = 15^\circ$ věžák, který se bude dotýkat hvězd. Jak musí být vysoký, aby zpomalil rotaci Země o $1\,\%$? Zemi uvažujte jako homogenní kouli o hmotnosti M, která se touto stavbou nezmění, protože hmotu Marek vytáhne z bílé díry. Předpokládejme, že hmota je po vytvoření nehybná a právě její roztočení zpomalí Zemi. Uvažujte dále, že tento hvězdodrap je dost tenký, je homogenní a má hmotnost $m = 33 \cdot 10^{-4} M$.

Marek se rád dívá na věci s nadhledem.

Při stavbě věžáku se zachová moment hybnosti Země L, který měla před započetím stavby. Platí

$$L = J\omega = \frac{2}{5} M R^2 \omega \,,$$

kde J je moment setrvačnosti Země před stavbou, ω její úhlová frekvence, M hmotnost Země a R její poloměr. Použili jsme vztah pro moment setrvačnosti homogenní koule.

Jaký bude moment setrvačnosti soustavy po stavbě? Bude se skládat ze dvou částí – Země, která bude mít stejný moment setrvačnosti jako předtím, a přidá se moment setrvačnosti věžáku. Spočtěme, jaký má moment setrvačnosti homogenní tyč délkové hustoty λ a délky l okolo svého středu, pokud je nakloněná o úhel $\alpha = 90^\circ - \varphi$ od osy otáčení, což bude právě příklad našeho hvězdodrapu.

Představíme si, že tyč je složena z malých částí o délce $\mathrm{d}l$. Jejich hmotnost bude $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$. Pokud uvážíme souřadnici x ve směru tyče kolmo na osu otáčení, bude promítnutí délky $\mathrm{d}l$ do tohoto směru $\mathrm{d}x = \mathrm{d}l \cos\varphi$. Z definice pak moment setrvačnosti věžáku bude

$$J'_\mathrm{v} = \int x^2\,\mathrm{d}m = \int_{-l\cos\varphi/2}^{l\cos\varphi/2} x^2 \frac{\lambda}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\,(\lambda l)\, l^2 \cos^2\varphi \,,$$

a protože $m = \lambda l$ je hmotnost tyče, tak pro tyč kolmo na osu otáčení dostaneme známý vzorec $(1/12)ml^2$, což potvrzuje správnost našeho výsledku.

Naše tyč má ale střed hmotnosti ve vzdálenosti $d = (R + l/2)\cos\varphi$ od osy otáčení Země, a podle Steinerovy věty bude proto její moment setrvačnosti okolo této osy $J_\mathrm{v} = J'_\mathrm{v} + md^2$.

Označme úhlovou frekvenci po stavbě ω'. Máme pak celkovou rovnici

$$\begin{aligned}
L = J\omega &= (J + J_\mathrm{v})\omega' \,,\\
J\omega &= \left(J + \frac{1}{12} m l^2 \cos^2\varphi + m\left(\left(R + \frac{l}{2}\right)^2 \cos^2\varphi\right)\right)\omega' \,,\\
0 &= \frac{1}{3} l^2 + Rl + \left(R^2 - \frac{J}{m\cos^2(\varphi)}\left(\frac{\omega}{\omega'} - 1\right)\right) \,,\\
l &= \frac{3R}{2}\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{J}{R^2}\frac{1}{m\cos^2(\varphi)}\left(\frac{\omega}{\omega'} - 1\right)\right)}\right) =\\
&= \frac{R}{2}\left(-3 + \sqrt{9 - 12 + \frac{24M}{495 m\cos^2\varphi}}\right) = \frac{R}{2}\left(-3 + \sqrt{\frac{8M}{165 m\cos^2\varphi} - 3}\right) \,,
\end{aligned}$$

kde jsme vybrali fyzikálně relevantní kladný kořen, v posledním kroku jsme dosadili za J a využili toho, že ze zadání $\omega'/\omega = 99/100$. Dosazením za m a φ dostaneme $l \doteq 1\,800\,\mathrm{km}$.

Marek Milička
marek.milicka@fykos.cz

Úloha FB ... kmitající hmotná kladka

Mějme homogenní kladku s hmotností m ve tvaru disku o poloměru r. Tuto kladku zavěsíme o strop tak, že na jedné straně je lano přivázané přímo o strop a na druhé straně přes pružinu s tuhostí k. Kladku z rovnovážné polohy potáhneme o trochu níže. Jaká je perioda malých kmitů? Kladka po laně neprokluzuje. *Prý je málo kmitů, tak Lego navrhl.*

V rovnovážnej polohe je lano napínané silou $mg/2$, a to je zároveň sila, ktorou ťahá pružina lano.

Keď kladku potiahneme nadol tak, že sa jej stred posunie o x nadol, musí sa pružina predĺžiť o $\Delta y = 2x$ voči svojej dĺžke v rovnovážnej polohe (pretože na druhej strane sa lano vôbec nepredĺži). Bude tým pádom pôsobiť silou o $\Delta F_\mathrm{k} = k\Delta y = 2kx$ vyššou oproti rovnovážnemu prípadu, čiže $F_\mathrm{k} = mg/2 + 2kx$. A to je práve sila, ktorou je jedna strana kladky ťahaná nahor. Nakoľko sa jedná o hmotnú kladku, nevieme, akou silou je ťahaná nahor druhá strana, označme si túto silu $T = mg/2 + \Delta T$ (mohli by sme si tú silu označiť iba ako T a počítať s ňou, avšak tento rozklad je praktickejší).

Potom celková sila pôsobiaca na kladku je

$$F = F_\mathrm{k} + T - F_g = mg/2 + 2kx + mg/2 + \Delta T - mg = 2kx + \Delta T\,,$$

kde smer nahor berieme ako kladný. Zároveň je už snáď jasné, prečo je substitúcia $T = mg/2 + \Delta T$ taká užitočná. Zrýchlenie kladky potom bude $a = (2kx + \Delta T)/m$.

Pozrime sa teraz na moment sily. Tiaž kladky má voči jej stredu nulový moment. Laná na oboch stranách majú rameno sily r, avšak každé z nich roztáča kladku opačným smerom. Za kladný smer rotácie zvolíme ten, pri ktorom strana kladky pod pružinou rotuje nahor (nakoľko to sa presne bude diať, keď kladka pôjde týmto smerom). Potom moment sily je

$$M = rF_\mathrm{k} - rT + 0F_g = r(mg/2 + 2kx) - r(mg/2 + \Delta T) = r(2kx - \Delta T)\,.$$

Moment zotrvačnosti disku je $I = mr^2/2$, tým pádom uhlové zrýchlenie je

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{r(2kx - \Delta T)}{mr^2/2} = 2\frac{2kx - \Delta T}{mr}\,.$$

Keďže sa lano na strane bez pružiny nepohybuje, je zrejmé, že rýchlosť stúpania a obvodová rýchlosť musia mať rovnakú veľkosť (pretože kladka sa akoby kotúľa po lane, a to teda nahor). Rovnaký vzťah preto musí platiť aj pre zrýchlenie a „obvodové zrýchlenie“

$$\begin{aligned} a &= \varepsilon r\,,\\ \frac{2kx + \Delta T}{m} &= 2\frac{2kx - \Delta T}{m}\,,\\ 2kx + \Delta T &= 4kx - 2\Delta T\,,\\ \Delta T &= \frac{2}{3}kx\,. \end{aligned}$$

Môžeme dosadiť ΔT do zrýchlenia a dostávame

$$-\ddot{x} = a = \frac{2kx + \Delta T}{m} = \frac{8}{3}\frac{k}{m}x\,,$$

čo je rovnica lineárneho harmonického oscilátora s $\omega^2 = 8k/(3m)$, takže perióda malých kmitov bude

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}}\,.$$

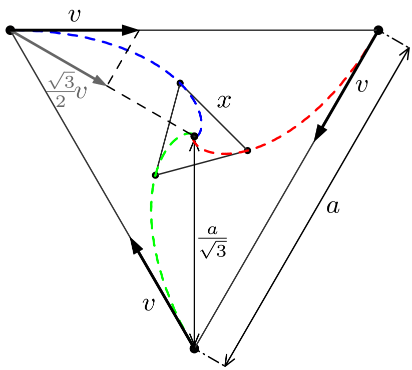
Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FC ... motokros derby

Tři motorkáři Pepa, Vojta a Marek jsou i se svými motorkami rozestaveni do tvaru rovnostranného trojúhelníku se stranou délky a. V čase $t = 0$ se všichni najednou začnou pronásledovat rychlostí v_0, přičemž Pepa pronásleduje Vojtu, Vojta Marka a Marek Pepu. Nechtějí se ale srazit v plné rychlosti, čím víc se k sobě tedy přiblíží, tím víc budou zpomalovat. Jejich rychlost bude proto přímo úměrná vzájemné vzdálenosti $v(l) = (l/a)v_0$. Jak dlouho bude Vojtovi trvat, než se přiblíží k Markovi na vzdálenost x (pokud $x < a$)?.

Kubo má doma už třetí motorku.

Ako prvé je potrebné si uvedomiť, že pohyby všetkých troch motorkárov budú navzájom symetrické vzhľadom na stred pôvodného trojuholníka. Ich vzájomné polohy budú preto stále tvoriť vrcholy rovnostranného trojuholníka, ktorého stred bude stále na pôvodnom mieste, avšak postupne sa bude zmenšovať dĺžka strany a meniť jeho orientácia.



Obrázek 3: Schéma situácie s vyznačenými trajektóriami.

Pozrime sa na radiálnu vzdialenosť niektorého z motorkárov od stredu trojuholníka. V čase $t = 0$ bude mať hodnotu $r_0 = a/\sqrt{3}$. Následne sa bude motorkár v tomto smere približovať k stredu rýchlosťou $v\sqrt{3}/2$ (priemet jeho rýchlosti na radiálny smer). Bude preto platiť

$$\dot{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{a}v_0 = -\frac{3}{2}\frac{r}{a}v_0\,.$$

Pokles hodnoty $r(t)$ je teda priamo úmerný jej okamžitej hodnote. Z toho vyplýva exponenciálny pokles

$$r(t) = r_0 \exp\left(-\frac{3}{2}\frac{v_0}{a}t\right) .$$

Požiadavku na vzájomnú vzdialenosť dvoch motorkárov rovnú x si vieme preformulovať na zhodnosť pomerov r/r_0 a x/a. Následne už stačí len upraviť vzniknutú rovnicu a vyjadriť z nej hľadaný čas t,

$$\frac{r(t)}{r_0} = \exp\left(-\frac{3}{2}\frac{v_0}{a}t\right) \stackrel{!}{=} \frac{x}{a} ,$$

$$t = \frac{2a}{3v_0} \ln\left(\frac{a}{x}\right) .$$

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha FD ... kuželový kelímek

Uvažme kelímek ve tvaru dutého kužele výšky h bez podstavy, jehož vrcholový úhel je α. Kelímek až po okraj naplníme tekutinou hustoty ρ. Protože by takový kelímek špatně stál dnem dolů, prudce ho otočíme dnem vzhůru a položíme na stůl tak, že ani trocha kapaliny nevyteče. Jaká vztlaková síla působí na kelímek? Kapalina ve vrcholu vnitřku kužele má atmosférický tlak. *Petr našel tento příběh ve vietnamské učebnici.*

Síla, kterou bude kapalina na kelímek působit je způsobena hydrostatickým tlakem

$$p = z\rho g ,$$

kde z je hloubka, ve které se kelímek nachází. Hydrostatický tlak je „dodatkem“ k atmosférickému tlaku, který působí z vně na kelímek a kterým pak působí kapalina nazpět. Kapalina v úplné špičce kelímku tak působí na kelímek pouze atmosférickým tlakem. Protože se tento konstantní příspěvek odečte s vnějším tlakem, nemusíme ho uvažovat.

Uvažme malý element vnitřní plochy kelímku dS, síla, kterou na něj kapalina působí je $dF = p\,dS$. Ovšem, ze symetrie vidíme, že pokud se všechny tyto infinitisimální síly posčítají, radiální složky se navzájem vynulují a zbyde jen síla ve směru nahoru. Stačí nám tedy uvažovat jen průmět dF ve směru nahoru, pro ten máme z jednoduché geometrie

$$dF_\uparrow = dF \sin\frac{\alpha}{2} .$$

Abychom dostali celkovou sílu, musíme zintegrovat

$$F = \int_S dF_\uparrow .$$

Kelímek můžeme popsat dvěma cylindrickými parametry $z \in \langle 0, h\rangle$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, poloměr kelímku bude závislá proměnná, pro kterou můžeme odvodit

$$R = z \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} .$$

Posledním krokem před integrací je rozmyslet si, jak bude vypadat element plochy $\mathrm{d}S$ vyjádřený v námi zvolených souřadnicích.[3] Uvážíme-li infinitisimálně malý čtvereček vyříznutý z pláště kuželu rozměrů $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$, kde $\mathrm{d}x$ je ve vodorovné rovině a $\mathrm{d}y$ ve směru k vrcholu, máme

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Vyjádřeme nyní $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ pomocí $\mathrm{d}\varphi$ a $\mathrm{d}z$. Máme

$$\mathrm{d}x = R(z)\,\mathrm{d}\varphi = z\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

uvážíme-li navíc, že $\mathrm{d}z$ je vlastně průmět $\mathrm{d}y$ do vertikální osy, dostaneme

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{d}z\,.$$

Když předchozí výsledky dosadíme do integrálu pro F a upravíme, máme

$$F = \int_S p(z)\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}\rho g\int_0^h\int_0^{2\pi} z^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,.$$

Nakonec tak dostáváme

$$F = \frac{2}{3}\pi\rho g\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)h^3\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha FE ... rychlotočná konvice

Marek má tenkou tepelně nevodivou kulovou vrstvu o poloměru R a hmotnosti M plnou vody. Kouli roztočí tak, že voda vevnitř zůstane nehybná. Koule se interakcí s vodou začne zpomalovat a po dlouhé době Marek zjistí, že teplota vevnitř vzrostla o ΔT. Na jakou úhlovou rychlost kouli roztočil?

Uvažujte, že voda má konstantní hustotu ρ a měrnou tepelnou kapacitu c_v. Kvůli tření, které taky zahřívá vodu, se nezachová moment hybnosti. *Marek se potloukal na matfyzu.*

Rotační energie slupky se přemění na tepelnou, která ohřeje vodu. Rotační energie je

$$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2\,,$$

kde J je moment setrvačnosti kulové vrstvy. Pro tepelnou energii platí

$$E_\mathrm{tep} = mc_\mathrm{v}\Delta T = \frac{4}{3}\pi R^3\rho c_\mathrm{v}\Delta T\,,$$

kde m je hmotnost vody uvnitř.

Zbývá nám spočíst moment setrvačnosti kulové slupky. Protože je slupka homogenní, zaveďme si plošnou hustotu

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{4\pi R^2}\,,$$

[3] To kromě uvedeného postupu můžeme odvodit nudně matematicky tak, že si spočítáme normu vektorového součinu derivací vektoru, kterým kužel parametrizujeme, jak nás učí teorie plošného integrálu prvního druhu.

kde S je povrch slupky. Představíme si, že kouli rozřežeme „vodorovně“ (kolmo na osu otáčení) na tenké obruče, které jsou ve výšce z, která půjde od $-R$ do R. Každý z nich má poloměr r, který určuje vzdálenost od osy otáčení, a výšku $\mathrm{d}z$. Z Pythagorovy věty máme $r = \sqrt{R^2 - z^2}$ a plocha prstýnku $\mathrm{d}S = 2\pi R\,\mathrm{d}z$. Hmotnost prstýnku je

$$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S = \frac{M\,\mathrm{d}z}{2R}\,.$$

Jeden prstýnek bude mít moment setrvačnosti

$$\mathrm{d}J = r^2\,\mathrm{d}m = \left(R^2 - z^2\right)\frac{M}{2R}\,\mathrm{d}z\,,$$

abychom spočetli celkový, musíme přesčítat, přesněji vyintegrovat, přes všechna z, tedy

$$J = \frac{M}{2R}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - z^2\right)\mathrm{d}z = \frac{M}{2R}\left(2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}MR^2\,.$$

Zbývá dosadit do vzorce pro energii a dostáváme

$$E_{\mathrm{rot}} = E_{\mathrm{tep}}\,,$$
$$\frac{1}{3}MR^2\omega^2 = \frac{4}{3}\pi R^3\rho c_{\mathrm{v}}\Delta T\,,$$
$$\omega = 2\sqrt{\frac{\pi R\rho c_{\mathrm{v}}\Delta T}{M}}\,.$$

Marek Milička
marek.milicka@fykos.cz

Úloha FF ... definiční

Uvažujme homogenní tyč postavenou na zemském povrchu svisle vzhůru. Jaká musí být délka této tyče, aby bylo její těžiště, tj. působiště gravitační síly, ve vzdálenosti $1{,}0\,\mathrm{m}$ *od jejího hmotného středu?*
Nápověda: *Mohlo by se vám hodit, že pro malá x platí* $\ln(1 + x) \approx x - x^2/2 + x^3/3$.

Marek rozjímal o své výšce.

Střed hmotnosti homogenní tyče je v jejím středu, tedy ve výšce $y_s = L/2$ nad zemí.

Těžiště je vážený průměr vzdáleností přes kousky tyče, kde váhy jsou síla působící na daný kousek. Protože je tyč homogenní, má konstantní lineární hustotu, hmotnost na metr délky $\lambda = M/L$, kde M je hmotnost tyče a L její délka. Gravitační síla působící na kousek o hmotnosti $\mathrm{d}m$ je

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{g}} = G\frac{M_{\mathrm{Z}}\,\mathrm{d}m}{r^2} = G\frac{M_{\mathrm{Z}}\lambda\,\mathrm{d}r}{r^2}\,,$$

kde r je vzdálenost daného kousku od středu Země, M_{Z} je hmotnost Země a $\mathrm{d}r$ je délka daného kousku.

Vážený průměr přes kousky je pak

$$r_{\mathrm{p}} = \frac{\int r\,\mathrm{d}F_{\mathrm{g}}}{\int \mathrm{d}F_{\mathrm{g}}} = \frac{\int_R^{R+L} r\,\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r}{\int_R^{R+L}\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r}\,,$$

kde R je poloměr Země. Spočtením integrálů dostaneme

$$r_\mathrm{p} = \frac{\ln \frac{R+L}{R}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{R+L}} = \frac{R(R+L)}{L} \ln\left(1 + \frac{L}{R}\right) .$$

Abychom se dopočetli výsledku, použijeme Taylorův rozvoj logaritmu, protože bude jistě platit $L \ll R$. Pak platí

$$\ln\left(1 + \frac{L}{R}\right) \approx \frac{L}{R} - \frac{L^2}{2R^2} + \frac{L^3}{3R^3} .$$

Dosadíme

$$\begin{aligned} r_\mathrm{p} &\approx \frac{R(R+L)}{L} \left(\frac{L}{R} - \frac{L^2}{2R^2} + \frac{L^3}{3R^3}\right) = \\ &= R\left(1 + \frac{L}{R}\right)\left(1 - \frac{L}{2R} + \frac{L^2}{3R^2}\right) \approx \\ &\approx R + \frac{L}{2} - \frac{L^2}{6R} , \end{aligned}$$

kde jsme v posledním kroku zanedbali členy nejvyššího řádu v L/R. Podívejme se na výsledek – výška těžiště je téměř ve výšce $R+L/2$ nad středem Země, jako střed hmotnosti, jediný poslední člen dělá rozdíl a ten má právě být jeden metr.

Dosazením dostaneme $L \approx 6{,}2\,\mathrm{km}$.

Marek Milička
marek.milicka@fykos.cz

Úloha FG ... nová lampa

Vlado si koupil novou lampu, ale jak už to v poslední době bývá, k novým zařízením vám dají jenom kabel bez adaptéru. Vlado má k dispozici $U = 24\,\mathrm{V}$ adaptér, ale nominální napájení nové lampy je $U_\mathrm{L} = 12\,\mathrm{V}$. Rozhodl se tedy, že ji k tomuto adaptéru napojí přes potenciometr, který zapojil jako napěťový dělič. Uvažujte, že lampa má mít příkon $P_\mathrm{L} = 12\,\mathrm{W}$. Vlado myslí na planetu a chce účinnost celé soustavy alespoň $\eta = 40\,\%$. Vypočítejte celkový odpor potenciometru, při kterém obvodem prochází nejvyšší proud.

Vlada (ne)osvítilo.

Označme si celkový odpor potenciometra ako R, odpor časti potenciometra v rozvetvenej časti obvodu ako R_X (obr. 4) a odpor lampy ako $R_\mathrm{L} = U_\mathrm{L}^2/P_\mathrm{L} = 12\,\Omega$. V oboch vetvách je rovnaké napätie U_L, preto podľa 1. Kirchhoffovho zákona platí

$$I = \frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}} + \frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{X}} . \tag{3}$$

Celková účinnosť obvodu je rovná pomeru výkonu lampy P_L a výkonu zdroja P, teda

$$\eta = \frac{P_\mathrm{L}}{P} = \frac{\frac{U_\mathrm{L}^2}{R_\mathrm{L}}}{UI} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_\mathrm{L}^2}{\eta U R_\mathrm{L}} .$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že najväčší prúd, ktorý môže pretekať obvodom nie je ovplyvnený R_X ani R. Naopak je nepriamo úmerný η, preto najväčší prúd dosiahneme pre najmenšiu možnú hodnotu $\eta = 0{,}4$.

Po dosadení do vzťahu (3) získavame

$$\frac{U_\mathrm{L}^2}{\eta U R_\mathrm{L}} = \frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}} + \frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{X}}\,,$$

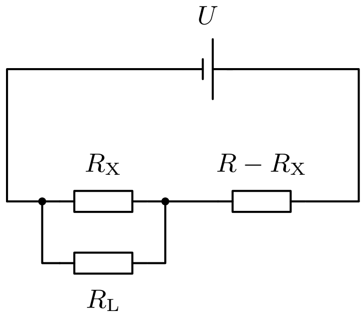
$$R_\mathrm{X} = \frac{R_\mathrm{L}}{\frac{1}{\eta}\frac{U_\mathrm{L}}{U} - 1} = 48\,\Omega\,.$$

Časťou potenciometra s odporom $R - R_\mathrm{X}$ musí tak isto pretekať prúd I. Celkové napätie v obvode je U a napätie v jeho rozvetvenej časti je U_L, preto je podľa 2. Kirchhoffovho zákona napätie na danej časti potenciometru $U' = U - U_\mathrm{L} = 12\,\mathrm{V}$. Podľa 1. Kirchhoffovho zákona ďalej platí

$$\frac{U'}{R - R_\mathrm{X}} = \frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}} + \frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{X}}\,,$$

a teda

$$R = R_\mathrm{X} + \frac{U'}{\frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}} + \frac{U_\mathrm{L}}{R_\mathrm{X}}} = \frac{\eta U^2}{P_\mathrm{L}}\left(1 + \frac{\eta U_\mathrm{L}}{U_\mathrm{L} - \eta U}\right) = 57{,}6\,\Omega \doteq 58\,\Omega\,.$$



Obrázek 4: Schéma zapojenia lampy s potenciometrom.

Vladimír Slanina
`vladimir.slanina@fykos.cz`

Úloha FH ... ledová bublina

David se díval kolmo na mýdlovou bublinu (pro jednoduchost uvažujte, že je tvořena pouze vodou), která se mu díky interferenci jevila jako zelená $\lambda_0 = 550\,\mathrm{nm}$. Protože byla venku ale opravdu zima, bublina začala mrznout. S jakou vlnovou délkou uvidí David zamrzlou bublinu? Uvažujte, že vnitřní průměr bubliny je po celou dobu $2r = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ a že David pozoruje jenom první interferenční řád. Index lomu ledu je $n_\mathrm{l} = 1{,}31$.

David si založil Instagram a našel video o zamrzající bublině.

Nejprve určíme tloušťku bubliny z interference na tenké vrstvě. Chceme-li interferenční maximum, pak požadujeme, aby byl m-násobek (nazýváme řád interferenčního maxima) vlnové délky roven optickému dráhovému rozdílu. Protože nás ale zajímá odraz, potřebujeme, aby to byl poločíselný násobek λ_0 kvůli změně fáze o π na odrazu. Obecně se může paprsek pohybovat ve vrstvě pod nějakým úhlem θ. Pro konstruktivní interferenci pak platí

$$\lambda_0 \left(m + \frac{1}{2}\right) = 2dn\cos\theta\,,$$

kde d je tloušťka vodní vrstvy, n její index lomu a θ je úhel paprsku od kolmice v místě, kde David interferenci pozoruje. Protože se David dívá na bublinu kolmo, $\cos\theta = 1$ a vzorec se redukuje na

$$\lambda_0 \left(m + \frac{1}{2}\right) = 2dn \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\lambda_0}{2n}\left(m + \frac{1}{2}\right).$$

Nyní musíme určit, jak se změní tloušťka d tím, že voda změní skupenství. Pro objem kulové slupky platí

$$V = \frac{4}{3}\pi\left[\left(R^3\right) - r^3\right]\,,$$

kde r je vnitřní poloměr a R je vnější poloměr. Dále musí platit zákon zachování hmotnosti

$$\begin{aligned}
V\rho &= V_l\rho_{\mathrm{l}}\,,\\
\frac{4}{3}\pi\left[(r+d)^3 - r^3\right]\rho &= \frac{4}{3}\pi\left[(r+d_l)^3 - r^3\right]\rho_{\mathrm{l}}\,,\\
\left((r+d)^3 - r^3\right)\rho &= \left((r+d_l)^3 - r^3\right)\rho_{\mathrm{l}}\,,\\
\left(3r^2d + 3rd^2 + d^3\right)\rho &= \left(3r^2d_l + 3rd_l^2 + d_l^3\right)\rho_{\mathrm{l}}\,.
\end{aligned}$$

Ze zadání víme, že $r = 5\,\mathrm{cm}$, a tudíž využijeme aproximaci $3rd^2 + d^3 \approx 0$, protože $d, d_l \ll r$. Zjednodušíme tedy rovnici na

$$3r^2d\rho = 3r^2d_l\rho_{\mathrm{l}} \quad \Rightarrow \quad d_l = d\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{l}}}\,,$$

což dosadíme zpět do druhé rovnice a dostaneme

$$\lambda\left(m_{\mathrm{l}} + \frac{1}{2}\right) = 2d\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{l}}}n_{\mathrm{l}}\,.$$

Dále využijeme vztah d a λ_0

$$\lambda\left(m_{\mathrm{l}} + \frac{1}{2}\right) = 2\frac{\lambda_0}{2n}\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{l}}}n_{\mathrm{l}}\,.$$

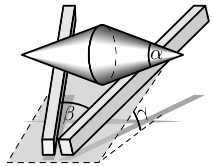
A využitím faktu, že David uvidí stejný interferenční řád $m = m_{\mathrm{l}} = 1$, dostaneme

$$\lambda = \lambda_0\frac{n_{\mathrm{l}}}{n}\frac{\rho}{\rho_{\mathrm{l}}} \doteq 588\,\mathrm{nm}\,.$$

David Škrob
david.skrob@fykos.cz

Úloha GA ... protigravitační

Marek má dva kužely o výšce h a vrcholovém úhlu α slepené podstavami k sobě. Umístí je horizontálně doprostřed mezi dvě dlouhá dřívka, která spolu svírají úhel β a leží v rovině s úhlem sklonu γ. Obě dřívka mají vzhledem k horizontální rovině stejný sklon. Marek překvapeně sleduje, jak se body dotyku kuželů s dřívky pohybují nahoru. Jaký nejmenší může být úhel α?



Marek považoval zákon gravitace za příliš přízemní.

Při posunu vzhůru se sice „zvedá celé těleso“, protože body dotyku kuželů a dřívek stoupají, ale zároveň se body dotyku vzdalují od podstavy, čímž kužel, přesněji jeho těžiště, klesá. I když body dotyku budou stoupat, těžiště musí ve výsledku klesat, tedy druhý efekt musí být silnější než první. Protože hledáme krajní hodnotu, omezíme se na případ, kdy jsou efekty stejně silné.

Při vodorovném posunutí o vzdálenost x se body dotyku kužele s dřívky zvýší o $h_{\text{stoupání}} = x \operatorname{tg}(\gamma)$. Zároveň se při takovém posunutí posune kužel v rovině dřívek o $x \sec(\gamma)$[4] a mezera se proto rozšíří o $2x \sec(\gamma) \operatorname{tg}(\beta/2)$. Pokud u našeho tělesa zvětšíme mezeru mezi body dotyku o r, klesne těžiště o $r \operatorname{tg}(\alpha/2)/2$, protože v mezním případě leží těžiště a body dotyku ve stejné svislé rovině. Celkově se tedy při horizontálním posunutí o x sníží těžiště o

$$h_{\text{pokles}} = x \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos(\gamma)} .$$

Aby se kužely mohly hnout nahoru, musí v krajním případě platit

$$h_{\text{stoupání}} = h_{\text{pokles}} ,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(\gamma)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)} .$$

Pro úhel α pak musí platit

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\gamma)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right) .$$

Marek Milička
`marek.milicka@fykos.cz`

Úloha GB ... neprůhledné sklo

Mějme sklo tloušťky d, které obsahuje tmavé barvivo, díky kterému pohlcuje část prošlého světla. Uvažujme, že absorpční koeficient závisí lineárně na koncentraci barviva ve skle jako $\mu = \alpha w$, kde w je koncentrace. Máme-li sklo, ve kterém je vlivem výrobní chyby na povrchu standardní koncentrace barviva, ale pak se lineárně zvyšuje o $\Delta w = \beta x$, kde x je hloubka měřená od povrchu, kolikrát méně světla projde? *Petr přemýšlel, zda vůbec něco uvidí.*

Víme, že nezávadné sklo má konstantní absorpční koeficient $\mu = \alpha w$. Můžeme tak využít empirického Beer-Lambertova zákona, který nám říká, že intenzita světla při prostupu homogenním materiálem klesá exponenciálně jako

$$I(x) = I_0 \mathrm{e}^{-\mu x} = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha w x} .$$

[4]Funkce $\sec(x) = 1/\cos(x)$.

V případě nehomogenního materiálu (tedy proměnné koncentrace barviva v závadném skle) k problému musíme přistoupit složitěji. Beer-Lambertův zákon si můžeme vyjádřit v diferenciální podobě

$$\mathrm{d}I(x) = -I\mu(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

protože μ závisí lineárně na koncentraci, v našem případě máme

$$\mathrm{d}I(x) = -I\left(\alpha w + \alpha\beta x\right)\mathrm{d}x\,.$$

To je jednoduchá diferenciální rovnice, kterou můžeme vyřešit separací proměnných.

$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\left(\alpha w + \alpha\beta x\right)\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \ln I = -\int\left(\alpha w + \alpha\beta x\right)\mathrm{d}x$$

$$\ln I = -\left(\alpha w x + \frac{\alpha\beta}{2}x^2\right) + C$$

$$I = I_0 \exp\left(-\left(\alpha w x + \frac{\alpha\beta}{2}x^2\right)\right)$$

Označíme-li intenzitu prošlou celou nezávadnou destičkou jako I a intenzitu prošlou celou závadnou destičkou jako I' (uvažujeme stejnou počáteční intenzitu), dostáváme pro jejich poměr

$$\frac{I}{I'} = \exp\left(\frac{\alpha\beta}{2}d^2\right)\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha GC ... tak to změř

Pepa chtěl vždy žít jako 2D bytost na disku. Po dlouhém snažení se mu to konečně podařilo. Na oslavu svého úspěchu se rozhodl, že si ve své ploše změří poloměr disku, na kterém žije, pomocí 2D hliníkového pravítka.

Pepa má ale zákeřného kamaráda Vojtu, který mu jeho úspěch nepřál, a tak jeho svět umístil na sporák tak, že od středu disku klesá jeho teplota exponenciálně s poloměrem podle předpisu tvaru $t(r) = t_\mathrm{p} + A\mathrm{e}^{-kr}$ od $t_\mathrm{max} = 160\,^\circ\mathrm{C}$ až do $t_\mathrm{min} = 60\,^\circ\mathrm{C}$ na jeho okraji, kde $t_\mathrm{p} = 20\,^\circ\mathrm{C}$ označuje pokojovou teplotu.

O kolik procent bude poloměr měřený z pohledu Pepy menší než skutečný poloměr desky měřený Vojtou? Uvažujte, že Vojta má dokonale pevné pravítko a Pepa má pravítko s konstantní tepelnou roztažností $\alpha = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{K^{-1}}$, které správně měří délku při pokojové teplotě t_p.

Pepa byl zoufalý.

Najprv si predstavme, že sa snažíme merať dĺžku na mieste s teplotou t hliníkovým pravítkom s najmenším merateľným dielikom dĺžky x_0. Ak by táto teplota bola rovná izbovej teplote t_p, tak by nám stačilo jednoducho spočítať počet elementárnych dielikov pravítka N, ktoré meraný úsek zaberá. Z toho by sme už vedeli určiť dĺžku meraného úseku ako Nx_0. Avšak keď je teplota daného miesta odlišná od izbovej teploty, tak sa celé pravítko a rovnako aj jeho elementárny dielik predĺžia (respektíve skrátia) na $(1 + \alpha(t - t_\mathrm{p}))$násobok pôvodnej dĺžky. Namiesto N elementárnych dielikov nám meraný úsek pokryje $N/(1 + \alpha(t - t_\mathrm{p}))$ elementárnych dielikov. K tomuto počtu priradíme dĺžku $Nx_0/(1 + \alpha(t - t_\mathrm{p}))$ namiesto dĺžky Nx_0, teda nameriame dĺžku $(1 + \alpha(t - t_\mathrm{p}))$krát menšiu oproti skutočnej.

Vráťme sa teraz k situácii zo zadania. Meriame polomer disku, ktorého skutočný polomer je R. Jeho teplota klesá exponenciálne s polomerom podľa predpisu $t(r) = t_\mathrm{p} + A\mathrm{e}^{-kr}$ z teploty t_max na teplotu t_min. Určme najprv z uvedených informácií hodnoty neznámych konštánt A a k. Pre $r = 0$ má platiť $t = t_\mathrm{max}$, takže po dosadení do predpisu pre teplotu dostávame

$$t_\mathrm{max} = t_\mathrm{p} + A\,,$$

odkiaľ vieme ľahko vyjadriť konštantu A ako $A = t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}$.

Na okraji disku naopak máme $r = R$ a $t = t_\mathrm{min}$, takže

$$t_\mathrm{min} = t_\mathrm{p} + A\mathrm{e}^{-kR}\,.$$

Po dosadení $A = t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}$ a úpravách postupne dostávame

$$\frac{t_\mathrm{min} - t_\mathrm{p}}{t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-kR}\,,$$

$$k = -\frac{1}{R}\ln\frac{t_\mathrm{min} - t_\mathrm{p}}{t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}}\,.$$

Závislosť teploty od polomeru sa tak upraví na

$$t(r) = t_\mathrm{p} + (t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p})\left(\frac{t_\mathrm{min} - t_\mathrm{p}}{t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}}\right)^{r/R}\,.$$

Predstavme si teraz meranie polomeru tohto disku od jeho stredu po okraj hliníkovým pravítkom. Dĺžka elementárneho úseku polomeru so skutočnou dĺžkou $\mathrm{d}r$, ktorú v tomto prípade nameriame vo vzdialenosti r od stredu disku, bude

$$\mathrm{d}r' = \frac{\mathrm{d}r}{1 + \alpha\left(t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}\right)\left(\frac{t_\mathrm{min} - t_\mathrm{p}}{t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}}\right)^{r/R}}\,.$$

Polomer, ktorý nameria Pepa, potom bude

$$R' = \int_0^R \frac{\mathrm{d}r}{1 + \alpha\left(t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}\right)\left(\frac{t_\mathrm{min} - t_\mathrm{p}}{t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}}\right)^{r/R}}\,.$$

Pre zjednodušenie spravíme substitúcie $\beta = \alpha\left(t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p}\right)$, $B = (t_\mathrm{min} - t_\mathrm{p})/(t_\mathrm{max} - t_\mathrm{p})$ a $x = r/R$. Po dodatočnom vyjadrení $\mathrm{d}r = R\,\mathrm{d}x$ prejde tento integrál do tvaru

$$R' = R\int_0^1 \frac{1}{1 + \beta B^x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Keď si teraz trikovo rozpíšeme jednotku v čitateli ako $1 + \beta B^x - \beta B^x$, tak sa tento výraz upraví na

$$R' = R\int_0^1 \left(1 - \frac{\beta B^x}{1 + \beta B^x}\right)\mathrm{d}x = R - R\int_0^1 \frac{\beta B^x}{1 + \beta B^x}\,.$$

Po substitúcii $u = 1 + \beta B^x$, z ktorej vieme vyjadriť $\mathrm{d}u = \beta B^x \ln B \,\mathrm{d}x$, nám potom člen βB^x v čitateli vypadne a dostaneme jednoducho

$$R' = R - \frac{R}{\ln B}\int_{1+\beta}^{1+\beta B} \frac{\mathrm{d}u}{u} = R - \frac{R}{\ln B}\ln\frac{1+\beta B}{1+\beta}\,.$$

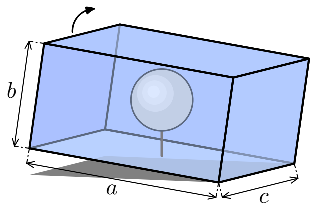
Pepa oproti Vojtovi nameria polomer menší o

$$\frac{R-R'}{R} = \ln\frac{1+\alpha\left(t_{\mathrm{min}}-t_{\mathrm{p}}\right)}{1+\alpha\left(t_{\mathrm{max}}-t_{\mathrm{p}}\right)}\Big/\ln\frac{t_{\mathrm{min}}-t_{\mathrm{p}}}{t_{\mathrm{max}}-t_{\mathrm{p}}} \doteq 0{,}19\,\%\,.$$

Tomáš Kubrický
tomas.kubricky@fykos.cz

Úloha GD ... převracíme kvádr

Uvažme dutý kvádr s podstavou o stranách $a = 50{,}0\,\mathrm{cm}$ a $c = 30{,}0\,\mathrm{cm}$ a s výškou $b = 30{,}0\,\mathrm{cm}$. Stěny kvádru mají zanedbatelnou hmotnost, ale celý jeho objem je naplněn vodou a kulatou bójkou o poloměru $r = 8{,}00\,\mathrm{cm}$ zhotovenou z materiálu o hustotě $\rho_0 = 350\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Bójka je pomocí nehmotného a bezobjemného provázku délky $l = a/2 - 2r$ uchycena uprostřed podstavy kvádru. Jakou práci musíme vynaložit na převrácení kvádru okolo hrany c? Uvažujte, že převracení provádíme velmi pomalu.



Petrův kvádr udělal bum bác.

Nejprve si vhodně zvolíme naši soustavu souřadnic. Ukáže se výhodným, pokud si ji zvolíme tak, že počátek bude ležet uvnitř hrany, okolo které kvádr otáčíme, osy x a y budou postupně v horizontálním a vertikálním směru; kladný směr osy x bude směrem ke kvádru. Úlohu nám stačí řešit dvourozměrně, proto osu z neřešíme. Nyní určíme souřadnice těžiště. Obecně, pro j-tou souřadnici těžiště systému platí

$$t_j = \frac{\sum_i m_i x_{ij}}{\sum_i m_i}\,,$$

kde m_i jsou hmotnosti těles, ze kterých se systém skládá a x_{ij} je j-tá souřadnice těžiště i-tého tělesa. Jinak řečeno, těžiště je vážený průměr souřadnic těžiští dílčích těles, kde váhy jsou hmotnosti těchto těles. Pro x-ovou a y-ovou souřadnici těžiště našeho systému tak platí

$$t_x = \frac{\frac{1}{2}a^2bc\rho - \frac{2}{3}\pi r^3 a\left(\rho-\rho_0\right)}{abc\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho-\rho_0\right)}\,,$$
$$t_y = \frac{\frac{1}{2}ab^2c\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{a}{2}-r\right)\left(\rho-\rho_0\right)}{abc\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho-\rho_0\right)}\,.$$

Neznáme, kde přesně se nachází těžiště vody v kvádru a tak jsme využili následující trik – uvážili jsme kvádr naplněný vodou bez bójky, který má těžiště (jak bychom očekávali) uprostřed kvádru a k němu jsme přičetli těleso stejného tvaru a polohy jako má bójka s (ryze formálně) zápornou hustotou $-\rho$. K tomu pak stačilo připočíst skutečnou bójku s hustotou ρ_0.

Představme si nyní kvádr poté, co ho začneme naklápět. V něm bude díky vztlakové síle bójka vždy napnutá směrem nahoru. Parametrizujme si všechny polohy úhlem náklonu kvádru oproti podložce φ. S trochou geometrie dostaneme pro polohu těžiště v této konfiguraci

$$t'_x = \frac{\frac{1}{2}\left(a\cos\varphi - b\sin\varphi\right)abc\rho - \frac{2}{3}\pi r^3 a\cos\varphi\left(\rho-\rho_0\right)}{abc\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho-\rho_0\right)}\,,$$

$$t'_y = \frac{\frac{1}{2}\left(a\sin\varphi + b\cos\varphi\right)abc\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\sin\varphi - r\right)\left(\rho-\rho_0\right)}{abc\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho-\rho_0\right)}\,.$$

Nyní určíme mezní úhel φ_M. Můžeme ho určit dvěma způsoby, buď pomocí derivace t'_y podle φ nebo z podmínky $t'_x = 0$. V obou případech dostaneme

$$\varphi_\mathrm{M} = \mathrm{arctg}\left(\frac{a}{b} - \frac{4}{3}\pi r^3\frac{1}{b^2c}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right) \doteq 58{,}2^\circ\,.$$

Pro práci pak máme

$$W = \Delta E = g\left(abc\rho - \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho-\rho_0\right)\right)\left(t'_y\left(\varphi_\mathrm{M}\right) - t_y\right)\,,$$

což lze dále upravit na

$$W = \frac{a\rho g}{2}\left(\sqrt{\left(abc - \frac{4}{3}\pi r^3\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)\right)^2 + \left(b^2c\right)^2} - b^2c\right) \doteq 59{,}5\,\mathrm{J}\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha GE ... síťová

Uvažujme tzv. multimode optický kabel, ve kterém jako zdroj světla, od kterého se šíří informace, slouží LED dioda. Ta se nachází ve středu trubice o průměru $D = 62{,}5\,\mathrm{\mu m}$ a s indexem lomu $n = 1{,}48$ a svítí izotropně (do všech směrů stejně). Pro jednoduchost předpokládejte, že se kolem trubice nachází vzduch a celá optická linka je dlouhá $l = 1{,}00\,\mathrm{km}$. Vypočítejte střední hodnotu časů, za které přijdou paprsky vyslané v tom samém okamžiku na konec kabelu. Uvažujte jenom paprsky, které dorazí do cíle. *Vlado se na přednášce z počítačových sítí zamýšlel nad tím, proč se multimode kabely používají jen na poměrně krátké vzdálenosti.*

Uvažujme jeden lúč, ktorý LED dióda vyžiarila pod uhlom φ voči osi kábla. Odvoďme najprv podmienku, aby lúč na hranici kábla nevyšiel z kábla von, ale iba sa odrazil. Pri dopade na rozhranie bude tento lúč zvierať s kolmicou uhol $\pi/2 - \varphi$. Z toho dôvodu, aby došlo k úplnému odrazu, musí platiť

$$n\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = n\cos\varphi > n_0\sin\frac{\pi}{2} \approx 1\,,$$

kde sme využili goniometrickú identitu $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ a tiež index lomu vzduchu $n_0 \approx 1$. Po úprave a uvážení toho, že funkcia kosínus je na intervale $\langle 0, \pi/2 \rangle$ klesajúca, dostávame pre uhol φ podmienku

$$\varphi < \arccos\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi_\mathrm{m} \doteq 47{,}5^\circ \tag{4}$$

Lúče vyžiarené pod väčším uhlom φ_m sa síce tiež do istej miery budú odrážať, avšak ich intenzita sa pri každom odraze zníži, a tak vo výsledku bude ich vplyv na signál prijatý na druhom konci kábla pri veľkej vzdialenosti zanedbateľný, preto s nimi vo zvyšku riešenia nepočítame.

Pri splnení podmienky (4) bude lúč po každom odraze zvierať s osou kábla stále uhol φ. Vďaka tomu dôjde k úplnému odrazu aj pri ďalších odrazoch, keďže lúč bude s rozhraním kábla a vzduchu zvierať stále ten istý uhol. Informácia sa v kábli s indexom lomu n bude pritom šíriť rýchlosťou $v = c/n$. Keďže uvedený lúč neustále zviera uhol φ s osou kábla, tak namiesto dĺžky kábla l musí prejsť v skutočnosti vzdialenosť $x = l/\cos\varphi$. Potom na druhý koniec kábla informácia dôjde za čas

$$t(\varphi) = \frac{x}{v} = \frac{nl}{c\cos\varphi}\,.$$

Pre určenie strednej hodnoty tohto času potrebujeme ešte určiť, aká časť všetkých lúčov spĺňajúcich podmienku (4) bude vyžiarená v nejakom malom intervale uhlov $\langle \varphi, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$. Keď si predstavíme pomyselnú sféru s polomerom R so stredom v LED dióde, na ktorej povrch budú dopadať rovnomerne vyžiarené lúče z LED diódy, tak nám vlastne stačí určiť pomer obsahu časti sféry zodpovedajúcej tomuto intervalu a obsahu časti sféry zodpovedajúcej celému prípustnému intervalu uhlov $\langle 0, \varphi_\mathrm{m})$. Časť sféry zodpovedajúcu malému intervalu uhlov $\langle \varphi, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$ tvorí tenké medzikružie s vnútorným polomerom $R\sin\varphi$ a hrúbkou $R\,\mathrm{d}\varphi$, takže s obsahom

$$\mathrm{d}S = 2\pi R\sin\varphi \cdot R\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Obsah časti sféry zodpovedajúcej celému prípustnému intervalu uhlov $\langle 0, \varphi_\mathrm{m})$ určíme teraz ako

$$S = \int_0^{\varphi_\mathrm{m}} 2\pi R^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2 \left(1 - \cos\varphi_\mathrm{m}\right)$$

Podiel lúčov, ktoré spadajú do malého intervalu uhlov $\langle \varphi, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$, je teda

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{1 - \cos\varphi_\mathrm{m}}\,.$$

Teraz môžeme vyjadriť strednú hodnotu času t. Ak by sme mali len konečný počet prípustných uhlov φ, stredná hodnota času t by bola vážený priemer časov $t(\varphi)$ prislúchajúcich jednotlivým prípustným uhlom φ, kde váhami by boli podiely počtu lúčov vyžiarených pod danými uhlami. V spojitom prípade platí podobný vzťah, akurát namiesto sumy vo váženom priemere potrebujeme použiť integrál. Zároveň musíme podiel lúčov vzťahovať nie k jednej konkrétnej hodnote φ, ale k nejakému malému intervalu uhlov $\langle \varphi, \varphi + \mathrm{d}\varphi)$ tak, ako sme to vyššie robili. Stredná hodnota času t tak v našom prípade bude

$$\langle t \rangle = \int_0^{\varphi_\mathrm{m}} \frac{nl}{c\cos\varphi}\frac{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{1 - \cos\varphi_\mathrm{m}} = \frac{nl}{c\left(1 - \cos\varphi_\mathrm{m}\right)} \int_0^{\varphi_\mathrm{m}} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Pre dopočítanie integrálu tangensu sa oplatí spraviť substitúciu $u = \cos\varphi$, keďže potom nám po vyjadrení $\mathrm{d}\varphi = -\,\mathrm{d}u/\sin\varphi$ sínus z integrálu vypadne. Vzťah pre strednú hodnotu sa upraví na

$$\langle t\rangle = \frac{-nl}{c\left(1-\cos\varphi_\mathrm{m}\right)}\int_1^{\cos\varphi_\mathrm{m}} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{-nl}{c\left(1-\cos\varphi_\mathrm{m}\right)}\ln\left(\cos\varphi_\mathrm{m}\right) = \frac{n^2 l}{c(n-1)}\ln(n) \doteq 5{,}97\,\mathrm{\mu s}\,.$$

Tomáš Kubrický
tomas.kubricky@fykos.cz

Úloha GF ... nerozlišitelné plyny

Ve vakuové komoře se za nízkého tlaku nachází směs dvou plynů – dusíku a oxidu uhelnatého, přičemž část z nich je ionizovaná. V hmotnostním spektrometru můžeme určovat plyny podle poměru jejich náboje a hmotnosti. Relativní molekulová hmotnost obou plynů je ale velmi podobná, přibližně $M = 28$, a náš spektrometr nemá dostatečné rozlišení na to, aby je rozlišil. Část částic je ale ionizovaná dvakrát, což se projeví jako signál na pozici $M = 14$. Účinný průřez dvojnásobné ionizace ku jednonásobné je pro CO v poměru 0,015 ku 1, u $\mathrm{N_2}$ je to 0,090 ku 1. Poměr účinného průřezu první ionizace $\mathrm{N_2}$ ku CO je pak 0,83. Koncentraci obou plynů bychom rádi určili z intenzity detekovaného signálu na daných pozicích. Ta se měří jako zesílený proud iontů, které dopadnou na detektor. Na pozici s molekulovou hmotností 28 je $I_{28} = 210\,\mathrm{\mu A}$, na pozici 14 je pak $I_{14} = 10{,}5\,\mathrm{\mu A}$. Určete poměr koncentrace oxidu uhelnatého ku dusíku. Neuvažujte jejich vzájemné interakce. *Dneska na přednášce, dneska na výběru.*

Ve hmotnostním spektrometru jsou jednotlivé částice ionizovány, aby mohla být působením elektrických a magnetických polí ovlivněna jejich dráha tak, abychom jednotlivé částice dokázali rozlišit. Na nabité částice totiž působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\,,$$

kde $\mathbf{E}$ je vektor elektrické intenzity a $\mathbf{B}$ vektor magnetické indukce. Zrychlení, a tedy i následná trajektorie, tak na polích závisí s konstantou úměrnosti e/m. Pokud tedy nabijeme částice na stejný náboj, jejich trajektorie jsou ovlivněné jejich hmotností. Proto je můžeme separovat na základě poměru m/e. Dvakrát ionizované částice se pak ve spektru jeví jako částice s poloviční hmotností.

Podle zadání tedy ve spektru vidíme, že detekujeme za jednotku času nějaký počet částic s hmotností 28, a jiný počet na pozici 14, což odpovídá dvojnásobné ionizaci těchto molekul. Označme parciální tlak dusíku $p_{\mathrm{N_2}}$ a parciální tlak oxidu uhelnatého p_CO a účinné průřezy první ionizace pro dusík $\sigma_{1,\mathrm{N_2}}$ a $\sigma_{1,\mathrm{CO}}$ stejnou veličinu pro oxid uhelnatý. Pak intenzitu signálu na pozici 28 můžeme vyjádřit jako

$$I_{28} = k\left(\sigma_{1,\mathrm{N_2}}p_{\mathrm{N_2}} + \sigma_{1,\mathrm{CO}}p_\mathrm{CO}\right)\,,$$

kde k je konstanta úměrnost mezi počtem detekovaných iontů a celkovým počtem iontů. Intenzita je v našem případě rovna proudu, protože měříme počet detekovaných nabitých částic, tedy vlastně prošlý náboj. Podobně pak můžeme vyjádřit intenzitu na pozici 14 jako

$$I_{14} = 2k\left(\sigma_{2,\mathrm{N_2}}p_{\mathrm{N_2}} + \sigma_{2,\mathrm{CO}}p_\mathrm{CO}\right)\,,$$

kde číslice 2 před celou závorkou vyjadřuje, že jeden iont nyní nese dvojnásobný náboj.

První rovnici vydělíme druhou a upravujeme

$$\frac{I_{28}}{I_{14}} = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{1,\mathrm{N}_2} p_{\mathrm{N}_2} + \sigma_{1,\mathrm{CO}} p_{\mathrm{CO}}}{\sigma_{2,\mathrm{N}_2} p_{\mathrm{N}_2} + \sigma_{2,\mathrm{CO}} p_{\mathrm{CO}}}\,,$$

$$2\frac{I_{28}}{I_{14}} = \frac{\sigma_{1,\mathrm{N}_2} + \sigma_{1,\mathrm{CO}}\frac{p_{\mathrm{CO}}}{p_{\mathrm{N}_2}}}{\sigma_{2,\mathrm{N}_2} + \sigma_{2,\mathrm{CO}}\frac{p_{\mathrm{CO}}}{p_{\mathrm{N}_2}}}\,,$$

$$2\frac{I_{28}}{I_{14}}\sigma_{2,\mathrm{CO}}\frac{p_{\mathrm{CO}}}{p_{\mathrm{N}_2}} - \sigma_{1,\mathrm{CO}}\frac{p_{\mathrm{CO}}}{p_{\mathrm{N}_2}} = \sigma_{1,\mathrm{N}_2} - 2\frac{I_{28}}{I_{14}}\sigma_{2,\mathrm{N}_2}\,,$$

$$\frac{p_{\mathrm{CO}}}{p_{\mathrm{N}_2}} = \frac{\sigma_{1,\mathrm{N}_2} - \frac{2I_{28}}{I_{14}}\sigma_{2,\mathrm{N}_2}}{2\frac{I_{28}}{I_{14}}\sigma_{2,\mathrm{CO}} - \sigma_{1,\mathrm{CO}}}\,,$$

$$\frac{p_{\mathrm{CO}}}{p_{\mathrm{N}_2}} = \frac{\sigma_{1,\mathrm{N}_2}}{\sigma_{1,\mathrm{CO}}}\frac{1 - \frac{2I_{28}}{I_{14}}\frac{\sigma_{2,\mathrm{N}_2}}{\sigma_{1,\mathrm{N}_2}}}{2\frac{I_{28}}{I_{14}}\frac{\sigma_{2,\mathrm{CO}}}{\sigma_{1,\mathrm{CO}}} - 1}\,.$$

Nyní už nám stačí jen dosadit za poměry uvedené v zadání a dostáváme

$$\frac{p_{\mathrm{CO}}}{p_{\mathrm{N}_2}} = 0{,}83\frac{\frac{2I_{28}}{I_{14}}0{,}09 - 1}{1 - 2\frac{I_{28}}{I_{14}}0{,}015} \doteq 5{,}4\,.$$

Oxidu uhelnatého je tedy v této atmosféře výrazně více než dusíku.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha GG ... odpudivé světlo

Určitě se vám už stalo, že jste vyšli z málo osvětlené budovy a najednou vás oslepilo Slunce. Vypočítejte, jakou silou působí Slunce na Zemi svým zářením. Předpokládejte, že je zemský povrch tvořený pouze vodou, což znamená, že se zlomek $\alpha = 0{,}31$ veškerého dopadajícího záření perfektně odrazí od povrchu a zbytek je pohlcen.

Vlado vyšel ze školy a rovnou se otočil zpátky.

Riešením úlohy je súčet dvoch efektov – v prvom uvažujeme, že sa $1-\alpha$ fotónov pohltí, a v druhom, že sa α fotónov od Zeme odrazí ako od zrkadla.

Keďže je Zem rotačne symetrická okolo osi danej spojnicou Slnko-Zem, tak si môžeme úlohu parametrizovať uhlom φ, ktorý zviera spojnica stredu Zeme a bodu na jeho povrchu so spojnicou Slnko-Zem. Tieto body majú tú vlastnosť, že na dané miesta na Zemi svieti Slnko pod rovnakým uhlom, a to φ od kolmice na povrch. Body na povrchu gule, ktoré sa nachádzajú medzi uhlami φ a $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ vytínajú na povrchu Zeme plochu $\mathrm{d}A = 2\pi R_\oplus \sin\varphi \cdot R_\oplus\,\mathrm{d}\varphi$.

Interakciu fotónov a Zeme vieme modelovať ako zrážky. V prvom prípade je $1-\alpha$ fotónov neelasticky pohltených Zemou, teda ich hybnosť sa zmení o $\Delta\mathbf{p}_1 = 0 - \mathbf{p} = -\mathbf{p}$. V druhom prípade dôjde k elastickej zrážke podľa zákonu odrazu, pri ktorej sa zmení len zložka hybnosti $\mathbf{p}_\perp$, ktorá je kolmá na povrch v mieste odrazu. Hybnosť α fotónov sa tým pádom zmení o $\Delta\mathbf{p}_2 = \left(\mathbf{p}_\parallel - \mathbf{p}_\perp\right) - \left(\mathbf{p}_\parallel + \mathbf{p}_\perp\right) = -2\mathbf{p}_\perp$.

Následne si vyjadríme hybnosť fotónov cez výkon P, ktorým žiari Slnko na Zem vo vzdialenosti Zeme. Pre hybnosť N fotónov, ktoré na Zem dopadnú za čas Δt a s vlnovou dĺžkou λ, platí

$$p = N\frac{h}{\lambda} = N\frac{h}{\frac{hc}{E}} = \frac{NE}{c} = \frac{P\Delta t}{c}\,,$$

kde sme pri úpravách využili vzťah pre energiu fotónu $E = \frac{hc}{\lambda}$.

Silu, ktorou pôsobí žiarenie na Zem, vypočítame podľa 2. Newtonovho zákonu

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = -\left((1-\alpha)\frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t}\right)\,.$$

Znamienko mínus je vo vzťahu použité kvôli tomu, že podľa zákonu zachovania hybnosti je zmena hybnosti Zeme v opačnom smere ako zmena hybnosti fotónov. Dôsledkom toho je Zem žiarením „odtláčaná“ od Slnka.

Kvôli symetrii situácie bude sila pôsobiť v smere spojnice Slnko-Zem, ktorý budeme ďalej nazývať „rovnobežný smer“. Vzhľadom na výsledný smer sily $\mathbf{F}$ budeme uvažovať len zmenu hybnosti v rovnobežnom smere ($F_{\parallel}$). V skutočnosti sa nám ale oplatí zaviesť si namiesto sily tlak slnečného žiarenia

$$\mathcal{P} = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{P}{A}\frac{1}{c} =: \frac{I}{c}\,,$$

kde I je výkon, ktorý ma žiarenie vo vzdialenosti Zeme od Slnka, na jednotku plochy orientovanej kolmo na tieto lúče.

Pozrime sa na prvý prípad, v ktorom sú všetky slnečné lúče pohltené. Keďže fotóny smerujú v rovnobežnom smere, tak v rovnakom smere bude aj ich zmena hybnosti $\Delta p_1 = p$. Tlak $\mathcal{P}$ v tomto prípade vyjadruje, že na element plochy $\mathrm{d}A_{\mathrm{eff}}$, ktorý je kolmý na lúče, pôsobí element sily $\mathrm{d}F_{\parallel}$. Element plochy $\mathrm{d}A$ s lúčmi zviera uhol φ, preto $\mathrm{d}A_{\mathrm{eff}}$ získame tak, že $\mathrm{d}A$ premietneme do smeru kolmého na lúče a dostaneme

$$\mathrm{d}A_{\mathrm{eff}} = \mathrm{d}A\cos\varphi = 2\pi R^2 \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Výsledná sila pôsobiaca na Zem v rovnobežnom smere je potom

$$\begin{aligned} F_{1\parallel} &= \int_{\text{polguľa}} \mathcal{P}\,\mathrm{d}A_{\mathrm{eff}} = \mathcal{P}\cdot 2\pi R_{\oplus}^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\mathcal{P}R_{\oplus}^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\mathcal{P}R_{\oplus}^2\cdot\frac{1}{2} = \mathcal{P}\cdot\pi R_{\oplus}^2\,. \end{aligned}$$

Dostali sme známy výsledok, a to, že ak na guľu svietia rovnobežné lúče, tak potom je efektívna plocha Zeme v kolmom smere $\pi R_{\oplus}^2$.

Rozoberme teraz druhý, komplikovanejší prípad. Ako sme už v úvode naznačili, zmena hybnosti $\Delta\mathbf{p}_2$ je kolmá na povrch, čiže bude smerovať v radiálnom smere zo stredu Zeme v danom mieste odrazu (situácia je analogická ku dopadu lúčov na rovinu pod uhlom φ od kolmice). Veľkosť $\Delta\mathbf{p}_2$ je rovná dvojnásobku kolmej hybnosti na povrch, teda $\Delta p_2 = 2p_{\perp} = 2p\cos\varphi$. Z Δp_2 nás ale zaujíma iba rovnobežná zložka rýchlosti so spojnicou Slnko-Zem, teda

$$\Delta p_{2\parallel} = \Delta p_2\cos\varphi = 2p\cos^2\varphi = p\left(1+\cos\left(2\varphi\right)\right)\,.$$

Analogicky k prvému prípadu však musíme rátať ešte s efektívnou plochou $\mathrm{d}A_{\mathrm{eff}}$ namiesto celkovej plochy $\mathrm{d}A$. Výsledná sila potom je

$$F_{2\parallel} = \int_{\text{polguľa}} \mathcal{P}\left(1+\cos\left(2\varphi\right)\right)\mathrm{d}A_{\mathrm{eff}} = \mathcal{P}\cdot 2\pi R_{\oplus}^2 \int_0^{\pi/2} \left(\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\cos(2\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= 2\pi\mathcal{P}R_{\oplus}^2\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(4\varphi)}{4}\,\mathrm{d}\varphi\right) = 2\mathcal{P}\pi R_{\oplus}^2\cdot\left(\frac{1}{2}+0\right) = \mathcal{P}\cdot\pi R_{\oplus}^2\,.$$

Dostali sme prekvapivý výsledok – efektívny povrch pri úplnom odraze je rovnaký ako pre úplne pohltenie! Z toho vyplýva, že v skutočnosti výsledná sila pôsobiaca na Zem nie je vôbec závislá od percenta odrazených fotónov (parametru α).

V tomto momente nám ostáva už len určiť hodnotu intenzity I. Slnko vyžaruje s výkonom $L_{\odot}$. Toto svetlo sa šíri od Slnka do všetkých smerov rovnako, teda vo vzdialenosti $r = 1\,\mathrm{au}$ pripadá na jednotku plochy výkon

$$I = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2}\,.$$

Napokon dostávame

$$F_{\parallel} = (1-\alpha)F_{1\parallel} + \alpha F_{2\parallel} = \frac{I}{c}\pi R_{\oplus}^2 = \frac{L_{\odot}}{4c}\frac{R_{\oplus}^2}{r^2} \doteq 5{,}8\cdot 10^8\,\mathrm{N}\,.$$

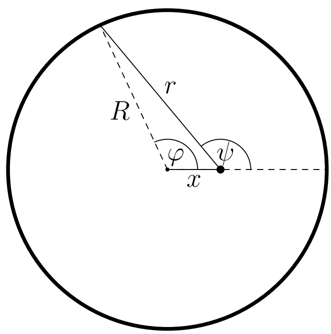
Táto sila je výrazne menšia ako gravitačná sila, ktorou pôsobí Slnko na Zem, s veľkosťou $\sim$ $\sim 3{,}5\cdot 10^{22}\,\mathrm{N}$.

Vladimír Slanina
`vladimir.slanina@fykos.cz`

Úloha GH ... nabitý prstenec

Kubo se snažil vytvořit past pro nabité částice. Vzal si k tomu tenký homogenně elektricky nabitý prstenec o poloměru $R = 1{,}0\,\mathrm{cm}$ a délkové nábojové hustotě $\lambda = 9{,}0\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C\cdot m^{-1}}$. Následně do jeho středu vložil nabitou částici s měrným nábojem $q/m = 5{,}2\cdot 10^8\,\mathrm{C\cdot kg^{-1}}$. Ve směru kolmém na rovinu prstence šlo bohužel jenom o labilní rovnovážnou polohu, proto částici ze středu mírně vychýlil jen v této rovině. Určete periodu počátečního pohybu částice kolem středu prstence. *Kubo chtěl analyticky spočítat integrál z úlohy „Faradayův kolektor“.*

Na určenie periódy malých kmitov musíme najprv spočítať výslednú silu pôsobiacu na nabitú časticu od nabitého prstenca. Ten bude pôsobiť iba coulombicky, ale z každého svojho bodu. Označme si výchylku nabitej častice od stredu prstenca ako x a vzdialenosť nejakého elementu prstenca (v smere ψ od častice) ako r. Tú vieme spočítať pomocou kosínusovej vety ako $r^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi$, kde φ je súradnica elementu na prstenci vzhľadom na jeho stred. Tento uhol vieme určiť pomocou sínusovej vety pre strany R a x.



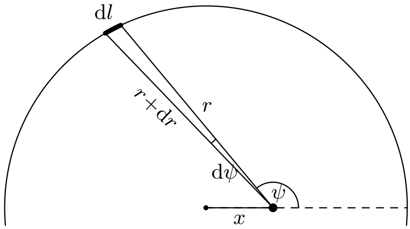
$$\frac{R}{\sin(\pi-\psi)} = \frac{x}{\sin(\psi-\varphi)} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \psi - \arcsin\left(\frac{x}{R}\sin\psi\right)\,,$$

$$\cos\varphi = \cos(\psi)\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{R}\sin\psi\right)\right) + \sin(\psi)\frac{x}{R}\sin\psi = \sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}\sin^2\psi}\cos\psi + \frac{x}{R}\sin^2\psi\,.$$

Dosadením do kosínusovej vety dostávame vzdialenosť r ako funkciu uhla ψ, pričom pre malé hodnoty x môžeme výraz upraviť zanedbaním členov rádu $\mathcal{O}(x^2)$.

$$r^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}\sin^2\psi}\cos\psi - 2x^2\sin^2\psi \approx R^2 - 2Rx\cos\psi\,.$$

Ďalej ešte potrebujeme vyjadriť dĺžku elementu prstenca $\mathrm{d}l$ z diferenciálu $\mathrm{d}\psi$. Tú spočítame opäť pomocou kosínusovej vety.



$$\mathrm{d}l^2 = r^2 + \left(r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi}\,\mathrm{d}\psi\right)^2 - 2r\left(r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi}\,\mathrm{d}\psi\right)\cos\mathrm{d}\psi = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi}\,\mathrm{d}\psi\right)^2 + r^2\,\mathrm{d}\psi^2 + \mathcal{O}\left(\mathrm{d}\psi^3\right)$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\psi}\right)^2}\,\mathrm{d}\psi = \sqrt{r^2 + \mathcal{O}(x^2)}\,\mathrm{d}\psi \approx r\,\mathrm{d}\psi$$

Derivácia funkcie $r(\psi)$ je rádu $\mathcal{O}(x)$, jej druhá mocnina sa bude preto správať aspoň ako $\mathcal{O}(x^2)$, takže ju môžeme zanedbať v porovnaní s hodnotou r^2.

Teraz nám už nič nebráni v tom spočítať celkové elektrické pole pôsobiace na nabitú časticu. To by sme štandardne mohli počítať vektorovo, tu si ale môžeme uvedomiť osovú symetriu nášho problému a obmedziť sa na zložku intenzity v smere výchylky x. Do výrazu preto pridáme prefaktor $\cos\psi$.

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\lambda\cos\psi}{r^2}\,\mathrm{d}l \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\cos\psi}{r}\,\mathrm{d}\psi \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\cos\psi}{R}\left(1+\frac{x}{R}\cos\psi\right)\mathrm{d}\psi =$$
$$= \frac{\lambda x}{2\pi R^2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\cos^2\psi\,\mathrm{d}\psi = \frac{\lambda x}{2\pi R^2\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2\psi)}{2}\,\mathrm{d}\psi = \frac{\lambda x}{2\pi R^2\varepsilon_0}\left[\frac{\psi}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\lambda x}{4R^2\varepsilon_0}\,.$$

Pri výpočte sme využili aproximáciu $r^{-1} \approx R^{-1}\left(1 + (x/R)\cos\psi\right)$ vyplývajúcu z rozvoja $r(x)$ vyhovujúcu pre malé x. Pri samotnom vyčíslovaní výsledného integrálu sme zase využili fakt, že integrál z kosínusu od 0 do π aj od 0 do 2π je nulový.

Nakoniec nám zostáva si už len napísať pohybovú rovnicu nabitej častice s nábojom q a hmotnosťou m, identifikovať v nej rovnicu harmonického oscilátora a z nej určiť periódu malých kmitov.

$$ma = -\frac{q\lambda x}{4R^2\varepsilon_0} = -m\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{q\lambda}{4mR^2\varepsilon_0}\,,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi R\sqrt{\frac{m\varepsilon_0}{q\lambda}} \doteq 5{,}47 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}\,.$$

Hľadaná perióda malých kmitov nabitej častice je približne $T \doteq 5{,}5\,\mathrm{ns}$.

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha HA ... tření na nakloněné rovině

Máme hmotný bod na nakloněné rovině s proměnným sklonem v homogenním tíhovém poli. Úhel α mezi rovinou a vodorovným povrchem budeme pomalu zvětšovat do hodnoty α_1, při které se hmotný bod začne pohybovat. Následně úhel α zmenšujeme úhlovou rychlostí $\omega = 1\,{}^\circ{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$ tak, že osa otáčení roviny prochází hmotným bodem. Jakou vzdálenost po nakloněné rovině urazí hmotný bod mezi dvěma stacionárními polohami? Koeficient statického tření je $f_\mathrm{s} = 0{,}65$ a koeficient dynamického tření $f_\mathrm{d} = 0{,}51$. *Dávid si zapsal bakalářské repetitorium.*

Úlohu vieme riešiť v dvoch rozmeroch, a tak si súradnicovú sústavu zavedieme tak, že os x bude rovnobežná s naklonenou rovinou a os y na ňu kolmá. Rozkladom pôsobiacich síl do týchto dvoch smerov získame nasledujúcu sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x: &\quad \mathbf{T} + \mathbf{G} = m\mathbf{a} &&\Rightarrow \quad mg\sin\alpha - T = ma\,,\\ y: &\quad \mathbf{N} + \mathbf{G} = \mathbf{0} &&\Rightarrow \quad mg\cos\alpha - N = 0\,, \end{aligned}$$

kde T označuje treciu silu, G tiažovú silu, N normálovú silu pôsobiacu na hmotný bod od podložky, m jeho hmotnosť, g tiažové zrýchlenie a napokon a označuje výsledné zrýchlenie, s ktorým sa bude bod pohybovať.

V čase $t = 0$ je uhol α práve taký, že sa sily v x-ovom smere rovnajú, z čoho získame rovnicu na výpočet uhla α_1

$$mg\sin(\alpha_1) = f_\mathrm{s} mg\cos(\alpha_1) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg}(f_\mathrm{s})\,.$$

Vieme, že hneď ako sa hmotný bod začne pohybovať, tak sa začne meniť aj uhol α konštantnou rýchlosťou ω. Platí teda $\alpha(t) = \alpha(0) - \omega t = \alpha_1 - \omega t$. Vo všeobecnom čase t, kedy sa hmotný bod pohybuje, potom dostaneme z druhého Newtonovho zákona

$$mg\sin\alpha(t) - f_\mathrm{d} mg\cos\alpha(t) = ma \quad \Rightarrow \quad a = g(\sin(\alpha_1 - \omega t) - f_\mathrm{d}\cos(\alpha_1 - \omega t))\,.$$

Zintegrovaním poslednej rovnice podľa času dostaneme závislosť $v(t)$

$$v(t) = \frac{g}{\omega}\Big(\cos(\alpha_1 - \omega t) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha_1 - \omega t)\Big) + C_1\,.$$

Použitím podmienky, že v čase $t = 0$ je rýchlosť nulová, sa zbavíme integračnej konštanty C_1 a dostaneme

$$v(t) = \frac{g}{\omega}\Big(\cos(\alpha_1 - \omega t) - \cos(\alpha_1) + f_\mathrm{d}(\sin(\alpha_1 - \omega t) - \sin(\alpha_1))\Big)\,.$$

Z tejto rovnice vieme teraz už vypočítať čas $t_{\max}$, v ktorom sa hmotný bod znova zastaví, t.j. kedy bude platiť $v(t_{\max}) = 0$. Na osamostatnenie času t v rovnici najprv využijeme súčtové vzorce pre goniometrické funkcie $\sin(\alpha_1 - \omega t) = \sin(\alpha_1)\cos(\omega t) - \cos(\alpha_1)\sin(\omega t)$ a $\cos(\alpha_1 - \omega t) = \cos(\alpha_1)\cos(\omega t) + \sin(\alpha_1)\sin(\omega t)$. Dosadením a úpravou predchádzajúcej rovnice tak dostávame

$$v(t) = \frac{g}{\omega}\Big((\cos(\alpha_1) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha_1))\,(\cos(\omega t) - 1) + (\sin(\alpha_1) - f_\mathrm{d}\cos(\alpha_1))\sin(\omega t)\Big) = 0\,,$$

$$(\cos(\alpha_1) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha_1))\,(1 - \cos(\omega t)) = (\sin(\alpha_1) - f_\mathrm{d}\cos(\alpha_1))\sin(\omega t)\,,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{1-\cos(\omega t)}{\sin(\omega t)} = \frac{\sin(\alpha_1) - f_\mathrm{d}\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha_1)}\,,$$

$$\frac{\omega t}{2} = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sin(\alpha_1) - f_\mathrm{d}\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1) + f_\mathrm{d}\sin(\alpha_1)}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{f_\mathrm{s} - f_\mathrm{d}}{1 + f_\mathrm{d} f_\mathrm{s}}\right),$$

$$t_{\max} = \frac{2}{\omega}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{f_\mathrm{s} - f_\mathrm{d}}{1 + f_\mathrm{d} f_\mathrm{s}}\right) \doteq 12{,}0\,\mathrm{s}\,.$$

Okrem vzťahu pre tangens polovičného argumentu sme využili aj vyjadrenie sínusu uhla α_1 ako $f_\mathrm{s}/\sqrt{1+f_\mathrm{s}^2}$ a jeho kosínusu ako $1/\sqrt{1+f_\mathrm{s}^2}$, ktoré vyplývajú zo vzťahu $\alpha_1 = \mathrm{arctg}(f_\mathrm{s})$.

Keď už máme vyjadrený čas $t_{\max}$, môžeme pristúpiť k poslednému kroku – nájdeniu polohy $x(t_{\max})$, ktorá zodpovedá vzdialenosti, ktorú prešiel hmotný bod po podložke. Podobne ako sme našli závislosť $v(t)$ integráciou $a(t)$, tak teraz opätovnou integráciou $v(t)$ vyjadríme $x(t)$. Vyjde nám

$$x(t) = \frac{g}{\omega^2}\Big(\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_1 - \omega t) - \omega t\cos(\alpha_1) + f_\mathrm{d}(\cos(\alpha_1 - \omega t) - \cos(\alpha_1) - \omega t\sin(\alpha_1))\Big)\,,$$

kde sme integračnú konštantu určili z podmienky $x(0) = 0$. Opäť využijeme súčtové vzorce pre sínus a kosínus a danú závislosť upravíme do tvaru

$$x(t) = \frac{g}{\omega^2}\Big((f_\mathrm{d}\cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_1))\,(\cos(\omega t) - 1) + (f_\mathrm{d}\sin(\alpha_1) + \cos(\alpha_1))\,(\sin(\omega t) - \omega t)\Big)\,,$$

ktorý je opäť analogický predpisu $v(t)$. Teraz nám zostáva už len dosadiť čas $t_{\max}$ a výsledok upraviť do finálneho tvaru. Pri úpravách použijeme identity

$$\sin(2\,\mathrm{arctg}\,y) = \frac{2y}{1+y^2} \quad \text{a} \quad \cos(2\,\mathrm{arctg}\,y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}\,.$$

Dostávame tak

$$x(t_{\max}) = \frac{2g}{\omega^2}\left(\frac{f_\mathrm{s} - f_\mathrm{d}}{\sqrt{1+f_\mathrm{s}^2}} - \frac{1 + f_\mathrm{d} f_\mathrm{s}}{\sqrt{1+f_\mathrm{s}^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{f_\mathrm{s} - f_\mathrm{d}}{1 + f_\mathrm{d} f_\mathrm{s}}\right)\right) \doteq 27{,}7\,\mathrm{m}\,,$$

kde sme za uhlovú rýchlosť dosadili $\omega = \pi/180\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \doteq 1{,}745\cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Jakub Kliment
jakub.kliment@fykos.cz

Dávid Brodňanský
david.brodnansky@fykos.cz

Úloha HB ... dramatické zesílení

Do homogenního elektrického pole o intenzitě $E = 333\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}$ umístíme vodivou nenabitou kouli o poloměru $R = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. Určete, jaká bude v oblasti největší velikost elektrické intenzity.

Jarda si všimnul, že když sedí u rádia, tak lépe hraje.

Vložíme-li do elektrického pole vodivou kouli, náboje se na ni přeskupí tak, že kulová slupka bude ekvipotenciální plochou. Na nalezení pole ovšem využijeme následující trik.

Uvažujme, že do elektrického pole vložíme elektrický dipól o hodnotě $\mathbf{p}$, orientovaný ve směru osy z, kam také míří pole. Hodnota potenciálu elektrického dipólu je

$$\varphi_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{pz}{r^3}\,,$$

kde p je velikost dipólu a $\mathbf{r}$ je polohový vektor z počátku ve středu dipólu. Celkový potenciál je

$$\varphi_{\mathrm{tot}} = \varphi_{\mathrm{dip}} - Ez = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{p}{r^3} - E\right) z\,.$$

Můžeme si všimnout, že pro jistou vzdálenost R, pro kterou platí $p = 4\pi\varepsilon E R^3$, je potenciál nulový nezávislé na hodnotě z. Kolem dipólu v homogenním elektrickém poli tedy existuje ekvipotenciální plocha tvaru kulové sféry. Kdybychom na tuto plochu umístili opravdovou vodivou kulovou sféru, nic by se nestalo, protože plocha je to ekvipotenciální. Pokud v tento okamžik dipól uvnitř vodivé sféry odebereme, přeskupí se na sféře tak, aby byla opět ekvipotenciální. Situace mimo kouli se ovšem nezmění, protože siločáry pole musí být stále kolmé ke kulové sféře. Lze ukázat, že existuje právě jedno řešení takového problému – a my jsme jej našli. Umístění vodivé sféry do homogenního elektrického pole je (mimo kouli) ekvivalentní umístění dipólu o vhodné velikosti na místo středu koule.

Ze zadání máme poloměr koule jako R, proto je vhodná velikost dipólu $p = 4\pi\varepsilon E R^3$. Takový dipól kolem sebe vyvolá elektrické pole o intenzitě

$$\mathbf{E}_{\mathrm{dip}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(3\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right) = ER^3\left(3\frac{\mathbf{z}\cdot\mathbf{r}}{zr^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{z}}{zr^3}\right)\,,$$

kde jsme zavedli jednotkový vektor ve směru osy z jako $\mathbf{z}/z$, přičemž platí $\mathbf{p} = p\cdot\mathbf{z}/z$. Celková intenzita elektrického pole je

$$\mathbf{E}_{\mathrm{tot}} = \mathbf{E}_{\mathrm{dip}} + \mathbf{E} = \frac{ER^3}{zr^3}\left(3\frac{z^2}{r^2}\mathbf{r} + \left(\frac{r^3}{R^3} - 1\right)\mathbf{z}\right)\,.$$

Hledáme největší velikost elektrické intenzity, což je ekvivalentní s tím hledat největší kvadrát elektrické intenzity a na konci jej pouze odmocnit. Ten tedy najdeme jako

$$E_{\mathrm{tot}}^2 = \mathbf{E}_{\mathrm{tot}}\cdot\mathbf{E}_{\mathrm{tot}} = \left(\frac{ER^3}{zr^3}\right)^2\left(9\frac{z^4}{r^4}r^2 + \left(\frac{r^3}{R^3} - 1\right)^2 z^2 + 6\frac{z^2}{r^2}\left(\frac{r^3}{R^3} - 1\right)z^2\right) =$$

$$= \left(ER^3\right)^2\left(3\frac{z^2}{r^8} + \frac{1}{R^6} - \frac{2}{R^3 r^3} + \frac{1}{r^6} + 6\frac{z^2}{r^5 R^3}\right)\,.$$

Uvažujme nyní sféru s poloměrem $r > R$. Na každé takové sféře je velikost intenzity maximální v místech, kde je maximální z, tedy pro $z = r$. Dosazením $z = r$ tak dostáváme

$$E_{\mathrm{tot}}^2 = \left(ER^3\right)^2\left(\frac{4}{z^6} + \frac{1}{R^6} + \frac{4}{z^3R^3}\right)\,.$$

Tato funkce rychle klesá se z. Je proto evidentní, že nejvyšší hodnota velikosti intenzity elektrického pole bude těsně u koule, tedy ve vzdálenosti $z = R$. Dosazením a odmocněním předchozího vztahu dostaneme výsledek

$$E_{\mathrm{max}} = 3E = 999\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}\,,$$

který nezávisí na poloměru koule ani na ničem jiném.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `https://fykos.cz`
e-mail: `fykos@fykos.cz`

/FYKOS *@fykosak*

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Organizátoři

FYKOS

matfyz

MŠMT

Generální partner

SKUPINA ČEZ
GENERÁLNÍ PARTNER

Hlavní partner

Qminers

Zlatí partneři

CSG Aerospace

KARÁSKOVA LIMONÁDA

Stříbrní partneři

WOLFRAM

CASIO

Czech Republic esero

planetum

Partneři

HUMUSOFT

MathWorks

ESCAPE point

MERKUR

PROMETHEUS

RadiaCode