14. 2. 2025

PVA EXPO PRAHA

Řešení

fykos.cz

fyziklani.cz

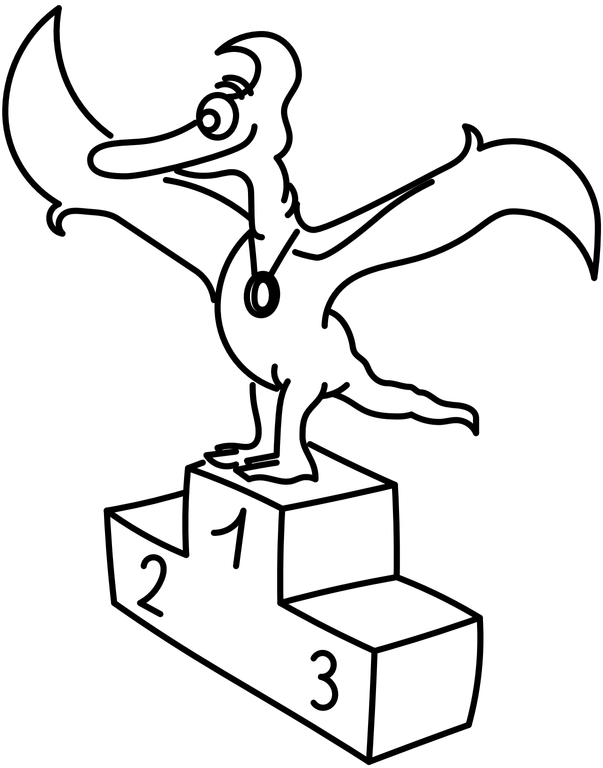
/fykos

@fykosak

Fyziklani2025

Řešení úloh

Fyziklani2025



Úloha AA ... rychlotěstoviny

Honza si na koleji vaří k večeři těstoviny. K dispozici má sporák o výkonu $P_1 = 1\,200\,\mathrm{W}$ a rychlovarnou konvici o výkonu $P_2 = 2\,200\,\mathrm{W}$. Jaká je nejkratší doba, za kterou je schopen ohřát půl litru vody o teplotě $20\,^\circ\mathrm{C}$ na teplotu $100\,^\circ\mathrm{C}$? *Honza spěchal s večeří.*

Nejprve určíme, jak dlouho by to trvalo teoretickému spotřebiči, který by měl společný výkon $P = P_1 + P_2$

$$P = \frac{Q}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{Q}{P} = \frac{Q}{P_1 + P_2}\,,$$

kde Q je potřebné teplo na zahřátí vody a t čas, za který dokáže teoretický spotřebič vodu ohřát. Můžeme uvažovat, že máme pouze tento jeden teoretický spotřebič, protože pokud rozdělíme vodu tak, že by v jednom spotřebiči začala vřít rychleji než ve druhém, využíváme špatně výkon, který máme.[1]

Na výpočet potřebného tepla využijeme rovnici

$$Q = mc_{\mathrm{voda}}\Delta T\,,$$

kde $m = V\rho_{\mathrm{voda}}$ je hmotnost půl litru vody, ΔT teplotní rozdíl mezi finální teplotou vody a teplotou původní, tedy $\Delta T = 100\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C} = 80\,^\circ\mathrm{C}$, a c_{voda} je měrná tepelná kapacita vody.

Kombinací dostaneme výsledný vztah

$$t = \frac{V\rho_{\mathrm{voda}}c_{\mathrm{voda}}\Delta T}{P_1 + P_2} \doteq 49\,\mathrm{s}\,.$$

David Škrob
`david.skrob@fykos.cz`

Úloha AB ... ještě větší panika na eskalátorech

Jedeme nahoru po eskalátorech, které mají rychlost $u = 0{,}75\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, a když jsme ve dvou třetinách jejich délky s, najednou si uvědomíme, že potřebujeme co nejrychleji zpátky dolů. Jakou minimální rychlostí v bychom museli běžet, aby bylo rychlejší obrátit se a běžet dolů, než vyběhnout nahoru a pak běžet po schodech jedoucích druhým směrem dolů? Zanedbejte lidi na eskalátorech a čas na přeběhnutí nahoře. *Karel stále přemýšlel, co udělat.*

Když se rozhodujeme ve dvou třetinách dráhy směrem nahoru, abychom se dostali zpátky dolů, musíme buď tuto vzdálenost uběhnout proti jedoucím schodům, anebo čtyři třetiny dráhy ve směru jedoucích schodů (třetinu nahoru a celé schodiště zpět dolů).

[1] Můžeme si taky představit, že jakmile začne voda vřít v jednom, část z druhého přelejeme. Tedy vlastně vždy využíváme plný výkon, což je právě ten moment, kdy bude doba nejkratší.

Pokud běžíme proti schodům, je naše rychlost vůči okolí $w_1 = v - u$. Pokud běžíme ve směru schodiště, je naše rychlost $w_2 = v + u$. Aby bylo rychlejší obrátit se a běžet dolů, musela by platit nerovnost

$$
\begin{aligned}
t_1 &< t_2\,,\\
\frac{\frac{2}{3}s}{w_1} &< \frac{\frac{4}{3}s}{w_2}\,,\\
\frac{1}{v-u} &< \frac{2}{v+u}\,,\\
v+u &< 2v-2u\,,\\
v &> 3u \doteq 2{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.
\end{aligned}
$$

Abychom se dostali co nejrychleji zpátky dolů, vyplatí se nám otočit, jestliže běžíme rychleji než trojnásobek rychlosti schodiště, tedy $2{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (tedy $8{,}1\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$).

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha AC ... čarování s benzínem

Tři FYKOSáci jeli na výlet do Vídně. Při kalkulaci ceny za benzín však došlo k neshodě, neboť fyzikovi vyšla cena 1 500 Kč, zatímco informatikovi 2 665 Kč. Po intenzivní interakci vyšlo najevo, že informatik počítal s délkou cesty do Vídně v kilometrech, vydělil ji množstvím paliva v litrech, které spotřebuje auto na 100 km, a vynásobil cenou benzínu 30 Kč na litr, čímž vyčaroval naprostý nesmysl.

Fyzik, naprosto nechápaje, jak mu mohl vyjít nižší odhad i s předpokládanou cenou benzínu 40 Kč na litr, chybu promptně našel. Přestože se neshodli na postupu výpočtu, oba shodou okolností odhadli stejně spotřebu auta. Jaká je spotřeba auta v litrech na 100 km?

Radek byl vyslýchán ohledně výpočtů.

Označme si informatikovu odhadovanou částku jako Σ, fyzikovu odhadovanou částku jako σ, vzdálenost do Vídně jako s a množství benzínu spotřebované na 100 km jako V. Pro Σ, σ pak platí

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= 30\frac{s}{V}\,,\\
\sigma &= \frac{40}{100}sV\,.
\end{aligned}
$$

Vyjádřeme si nyní z obou rovnic vzdálenost do Vídně s

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{30}\Sigma V\,,\\
s &= \frac{100}{40}\frac{\sigma}{V}\,.
\end{aligned}
$$

Výsledné rovnice můžeme dát do rovnosti a vyjádřit V

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{30}\Sigma V &= \frac{100}{40}\frac{\sigma}{V}\,,\\
V &= \sqrt{75\frac{\sigma}{\Sigma}}\,.
\end{aligned}
$$

Nyní již prostým dosazením a zaokrouhlením dostáváme

$$V \doteq 6{,}5\,\mathrm{l}\cdot(100\,\mathrm{km})^{-1}\,.$$

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Úloha AD ... brzdi, tak brzdi

Chceme ubrzdit auto na rovině na brzdné dráze délky $d = 50{,}0\,\mathrm{m}$. Víme, že kola autu nepodkluzují, právě když je jeho zrychlení menší než $a = 0{,}780g$. Jakou může jet auto nejvyšší rychlostí, aby zabrzdilo včas? *Karel si říkal, že klasika na začátek neuškodí.*

Kdyby autu podkluzovala kola, účinek brzdění by se snížil. Proto bude brzdit s maximálním uvedeným zrychlením a. Nejvíce dokáže zpomalit, pokud toto zrychlení bude mít po celou dobu. Chceme, aby auto zabrzdilo na dráze kratší než d. Musí tedy platit nerovnost

$$d > \frac{1}{2}at^2\,,$$

tedy čas brzdění bude

$$t < \sqrt{\frac{2d}{a}}\,.$$

Maximální rychlost, kterou auto může mít před počátkem brzdění, je tedy

$$v = at = \sqrt{2da} \doteq 27{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 99{,}6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

Pokud by tedy auto začalo optimálně zpomalovat 50 metrů od překážky a dokázalo by zpomalovat se zrychlením $0{,}780g$, ubrzdilo by se, pokud by mělo rychlost nižší než $99{,}6\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$.

Karel Kolář
`karel@fykos.cz`

Úloha AE ... hluboce se vlní

Pepa si o prázdninách vyplul na své soukromé jachtě na oceán, aby mohl pozorovat vlny. Všiml si, že daleko od pobřeží – v takzvané hluboké vodě *– není vliv hloubky vody významný. Lze tedy předpokládat, že úhlová frekvence vln ω závisí pouze na tíhovém zrychlení g a na vlnové délce λ. Odvoďte, jak by tato závislost měla vypadat, tj. nalezněte reálná čísla α a β taková, že $\omega = Cg^\alpha\lambda^\beta$, kde C představuje nějakou bezrozměrnou konstantu. Získaný vztah odpovídá tzv. disperzní relaci pro vlny na hluboké vodě.* *Pepa se nudil v Chorvatsku.*

Disperzní relace je vztah mezi vlnovou délkou λ a úhlovou frekvencí ω vlny. Podle zadání nepředpokládáme, že ω závisí na hloubce vody, ovšem pouze na zadaných veličinách, tj. vlnové délce λ a tíhovém zrychlení g.

Principem rozměrové analýzy je, že na obou stranách rovnice pro ω musí mít výrazy stejnou jednotku, v tomto případě $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$.

Podle zadání předpokládejme, že vztah je ve tvaru

$$\omega = Cg^\alpha\lambda^\beta\,,$$

kde C je nějaká bezrozměrná konstanta, kterou nedokážeme pomocí rozměrové analýzy určit. Aby tento výraz dával smysl, najdeme čísla α a β tak, aby byly jednotky na pravé a levé straně rovnice stejné. Symbolicky pro jednotky (bez konstanty C) píšeme

$$\mathrm{m}^0 \cdot \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{m}^\alpha \cdot \mathrm{s}^{-2\alpha} \cdot \mathrm{m}^\beta \,,$$

kde na pravou stranu symbolicky píšeme $\mathrm{m}^0 = 1$, jelikož metry v jednotce pro ω nevystupují. Srovnáním exponentů u sekund dostáváme algebraickou rovnici $-1 = -2\alpha$ a pro metry $0 = \alpha + \beta$. Vyřešením této jednoduché soustavy dostáváme, že $\alpha = 1/2$ a $\beta = -1/2$, tedy (bez konstanty) musí platit

$$\omega \propto \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \,.$$

Pro zajímavost, pokud bychom řešili vlnovou rovnici za příslušných zjednodušení v rámci Airyho linearizované teorie, dostali bychom přesný vztah (i s konstantou) pro vlny na vodě hloubky $h \gg \lambda/2$

$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} \,.$$

Vidíme, že vztah je nelineární, což vede k závislosti rychlosti šíření vlny na vlnové délce (k tzv. disperzi). Přesněji platí vztah

$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda} \operatorname{tgh} \frac{2\pi h}{\lambda}} \,,$$

kde na hluboké vodě zanedbáváme hyperbolický tangens jako $\operatorname{tgh}(2\pi h/\lambda) \approx 1$. Vidíme tedy, že vlny různých délek (alespoň v rámci přiblížení) se pohybují různou rychlostí, ať už vznikají vlivem gravitace, povrchového napětí či dalších vlivů.

Kdybyste měli zájem dozvědět se o vlnách na moři ještě více, doporučujeme nahlédnout do řešení 4. úlohy 3. série 35. ročníku FYKOSu.

Josef Trojan
josef.trojan@fykos.cz

Úloha AF ... počítáme třecí sílu

Na stůl položíme kvádr o hmotnosti $M = 5{,}5\,\mathrm{kg}$ a lankem s kladkou ho připojíme ke kvádru o hmotnosti $m = 1{,}1\,\mathrm{kg}$, který visí vedle stolu. Koeficient statického tření mezi kvádrem na stole a stolem je $f_\mathrm{s} = 0{,}47$ a koeficient dynamického tření $f_\mathrm{d} = 0{,}27$. Kvádry jsou na začátku v klidu. Jak velká bude třecí síla mezi kvádrem a stolem?

Lego si myslí, že podobný chyták ještě nebyl.

Kľúčová myšlienka pri tejto úlohe je, že vzorec $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}$ udáva maximálnu možnú hodnotu trecej sily a trecia sila pôsobí proti smeru pohybu. Čiže v situácii, keď sa nič nehýbe, je trecia sila práve taká veľká, aby sa nič nehýbalo.

V našom prípade je maximálna možná veľkosť trecej sily $F_{\text{t-max}} = f_\mathrm{s} M g \doteq 25\,\mathrm{N}$. Kváder je ale do boku ťahaný iba silou veľkosti $F_\mathrm{k} = mg \doteq 11\,\mathrm{N} < F_{\text{t-max}}$, teda aj veľkosť trecej sily bude iba $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{k}$. Ak by bola väčšia, spôsobovala by rozpohybovanie kvádra v opačnom smere, a to skrátka trecia sila nerobí, pretože potom by musela zas okamžite otočiť svoj smer.

Kváder sa teda nerozhýbe, pretože $F_\mathrm{k} < F_\text{t-max}$ a trecia sila ho zvládne udržať na mieste. Odpoveď na otázku preto je, že veľkosť trecej sily bude $11\,\mathrm{N}$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha AG ... čistá energie zvítězí

Ptáka Fykosáka při letu okolo jaderné elektrárny Temelín už z dálky uchvátily majestátní chladicí věže. Ze všech věží dohromady unikala vodní pára s objemovým tokem Q. O něco později proletěl pták Fykosák okolo uhelné elektrárny, z jejíž chladicích věží taktéž unikala pára s objemovým tokem Q. Pták Fykosák se zamyslel: kolikrát vyšší hmotnost uhlí se musí spálit v uhelné elektrárně v porovnání s hmotností rozpadlého uranu-235 v jaderné elektrárně, aby se vypařilo stejné množství vody? Průměrná využitelná energie uvolněná při rozpadu jednoho jádra uranu-235 je $200\,\mathrm{MeV}$. Molární hmotnost izotopu uranu-235 je $235\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$. Maximální výhřevnost černého uhlí je $30\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}$. Předpokládejte, že veškerá tepelná energie vzniklá v elektrárně se spotřebovává na vypařování vody. Voda se v obou elektrárnách ohřívá z teploty $20\,\mathrm{^\circ C}$. Zanedbejte změnu měrné tepelné kapacity vody se zvyšující se teplotou.
Tuto úlohu Vám přináší Skupina ČEZ.

Jindra by radši do elektrárny nesl gram uranu než tunu uhlí.

Energie uvolněná na jednotku hmotnosti atomů izotopu uranu-235 je

$$H_\mathrm{U} = \frac{E_\mathrm{U}}{m_\mathrm{U}} = \frac{N_A E_0}{M_{235}},$$

kde $E_0 = 200\,\mathrm{MeV} = 3{,}20 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}$ je průměrná využitelná energie uvolněná při rozpadu jádra uranu-235, M_{235} je molární hmotnost izotopu uranu-235 a $N_A = 6{,}022{\cdot}10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$ je Avogadrova konstanta, kterou najdeme v konstantovníku.

Energii uvolněnou při spálení jednotky hmotnosti kvalitního černého uhlí známe ze zadání

$$H_\mathrm{c} = \frac{E_\mathrm{c}}{m_\mathrm{c}} = 30\,\mathrm{MJ{\cdot}kg^{-1}}.$$

Pro ohřev daného množství vody musí platit $E_\mathrm{U} = E_\mathrm{c}$

$$\frac{N_A E_0}{M_{235}} m_\mathrm{U} = H_\mathrm{c} m_\mathrm{c},$$

$$\frac{m_\mathrm{c}}{m_\mathrm{U}} = \frac{N_A E_0}{M_{235} H_\mathrm{c}} \doteq 2{,}7 \cdot 10^6.$$

Hmotnost uhlí na vypaření vody je $2{,}7 \cdot 10^6$krát větší než hmotnost izotopu uranu-235.

Jindřich Jelínek
`jjelinek@fykos.cz`

Úloha AH ... tlak v uzavřené trubici

Máme uzavřenou U-trubici s konstantním průřezem S, jejíž konce jsou v různých výškách, přičemž rozdíl těchto výšek je Δh. Trubice obsahuje pouze vodu a bublinu vzduchu o objemu V, která je na začátku v „kratším konci" trubice. Změříme tlak na dně trubice. Následně nakláněním (důležité je, že bez otevření trubice) necháme bublinu vzduchu vybublat do delšího konce. Následně vrátíme trubici do původní polohy a znovu odměříme tlak na dně trubice. O kolik se změnil tlak? Můžete předpokládat, že vzduch má konstantní teplotu, že se v obou případech nachází v části trubice vedoucí svisle dolů a že stěny U-trubice jsou dokonale pevné.

Lego našel na YouTube.

Berúc do úvahy, že voda svoj objem veľmi nemení a steny trubice sú dokonale pevné, čiže ani trubica svoj objem nemení, nebude meniť svoj objem ani vzduch, pretože jeho objem je daný rozdielom medzi objemom trubice a vody v nej. Zároveň máme predpokladať, že teplota vzduchu sa nemení a berúc do úvahy, že trubica je uzavretá, nemôže sa meniť ani látkové množstvo vzduchu v trubici. Keď sa teda pozrieme na stavovú rovnicu vzduchu v trubici

$$pV = nRT\,,$$

vidíme, že o všetkom okrem tlaku už vieme, že sú to konštanty. Tým pádom, aj tlak musí ostať po celý čas konštantný, inak by stavová rovnica nebola vždy splnená.

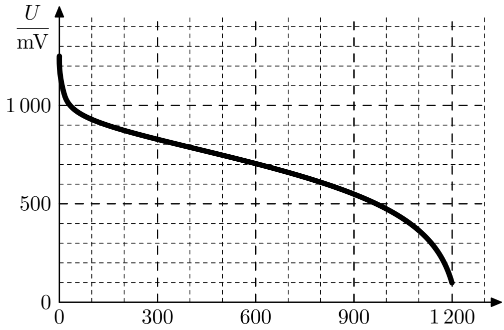
Označme si teda tlak vo vzduchovej bubline p_0. Potom tlak na spodku U-trubice bude p_0, k čomu ešte musíme pripočítať hydrostatický tlak od stĺpca vody medzi spodkom bubliny a spodkom U-trubice, takže $p_0 + h_1\rho g$. Nakoľko nás zaujíma len rozdiel medzi týmto tlakom pri dvoch rôznych polohách tej bubliny, tak p_0 sa vykráti a zostane len rozdiel hydrostatických tlakov.

Nakoľko objem bubliny sa nezmení a prierez trubice je konštantný, tak výška samotnej bubliny bude v oboch prípadoch rovnaká. Tlak pod dlhším ramenom je teda $p_2 = p_0 + h_2\rho g$, kde hydrostatický tlak je spôsobený stĺpcom vody h_2 v dlhšom ramene. Ten je teraz o Δh vyšší ako keď bola bublina v kratšom ramene, takže $h_2 - h_1 = \Delta h$. Čiže tlak bude väčší v druhom prípade (keď bude bublina v dlhšom konci trubice) a bude väčší presne o

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_0 + h_2\rho g - (p_0 + h_1\rho g) = \Delta h\rho g\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha BA ... palivový článek



Palivový článek je zařízení, které skrze elektrochemické reakce vyrábí z paliva elektrickou energii. V současné době při snaze o přechod na obnovitelné zdroje energie můžeme slyšet o vodíkových palivových článcích, ve kterých by jako palivo sloužil vodík H_2 *reagující s atmosférickým kyslíkem za vzniku vody a elektřiny. Takové zařízení se chová jako zdroj elektrického proudu a napětí, kde obě veličiny jsou svázány polarizační křivkou. Protože můžeme mít palivové články různé velikosti, přepočítává se proud na plošnou proudovou hustotu* j*, která popisuje, jaký proud projde skrz jednotkovou plochu článku. Z křivky v grafu určete, jakou maximální plošnou hustotu výkonu může daný palivový článek dodávat s tolerancí* $\pm 20\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$.

Jarda propaguje elektrochemii napříč všemi soutěžemi.

Plošnou hustotu výkonu (zkráceně plošný výkon) zdroje elektrické energie můžeme vyjádřit jako $P = Uj$, kde U je napětí na článku. V grafu máme zanesenou závislost napětí na plošné proudové hustotě, známe tedy obě potřebné veličiny. Stačí nám tedy je mezi sebou pro několik bodů na grafu vynásobit a jako řešení úlohy odevzdat nejvyšší hodnotu.

Je zřejmé, že na okrajích grafu je plošný výkon nulový, protože buď napětí nebo plošná proudová hustota jsou zde rovna nule. Můžeme tušit, že křivka bude mít jen jedno maximum. Postupně proto dosazujme za jednotlivé body v grafu. Pro $300\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$ je napětí asi $830\,\mathrm{mV}$, což odpovídá asi $250\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$. Pro $600\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$ je napětí asi $700\,\mathrm{mV}$, což odpovídá asi $420\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$, což je výrazně více. Pro $900\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$ je pak výkon asi $500\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$. Maximum se tedy bude nacházet někde okolo této hodnoty proudové hustoty. Na $1\,100\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$ je výkon už zase výrazně nižší, takže můžeme čekat, že maximum je mezi $700\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$ a $1\,000\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$. Zkusíme $750\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$, kde napětí odhadneme na $640\,\mathrm{mV}$, což vede na asi $480\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$. Pro $800\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$ je to pak přibližně stejná hodnota, na $850\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$ odhadneme napětí na $580\,\mathrm{mW}$, což vede na $490\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$.

Tabulka 1: Hodnoty odečtené z grafu.

$\frac{j}{\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}}$	$\frac{U}{\mathrm{mV}}$	$\frac{P}{\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}}$
300	830	250
600	700	420
900	550	500
1 000	480	480
1 100	370	410
750	640	480
800	600	480
850	580	490

Nejvyšší spočítaný plošný výkon byl tedy $500\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$ na $900\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$. Skutečné analyticky vypočítané maximum z předpisu funkce v grafu je $495\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$ pro $883\,\mathrm{mA\cdot cm^{-2}}$. Vidíme, že jsme se během několika málo kroků dostali velmi blízko správnému výsledku, který je samozřejmě v intervalu tolerance $(495 \pm 20)\,\mathrm{mW\cdot cm^{-2}}$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha BB ... mikroskopická roztažnost

Pohyb hrotu ve skenovacím tunelovém mikroskopu je možné ovládat s přesností na $0{,}10\,\mathrm{Å}$ *(kde* Å *značí angstrom;* $1\,\mathrm{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$*) kolmo na povrch vzorku. Jaký největší koeficient teplotní roztažnosti může mít držák hrotu dlouhého* $300\,\mathrm{\mu m}$*, aby při změně jeho teploty o* $0{,}10\,\mathrm{K}$ *nebyla změna polohy hrotu větší než výše zmíněná přesnost ovládání? Tento držák míří stejně jako hrot kolmo k povrchu.*

Za skenovací tunelový mikroskop byla udělena Nobelova cena už téměř před 40 lety.

V malém rozsahu změn teplot ΔT můžeme změnu délky vyjádřit pomocí lineárního vztahu

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta T\,,$$

kde l_0 je původní délka a α je hledaný koeficient teplotní roztažnosti. Protože se všechno odehrává na jedné přímce (kolmo k povrchu vzorku), není potřeba uvažovat žádnou další geometrii. Je tedy možné jednoduše vyjádřit α a dosadit veličiny ze zadání

$$\alpha = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta T} = \frac{0{,}01\,\mathrm{nm}}{300\,\mathrm{\mu m}\cdot 0{,}1\,\mathrm{K}} \doteq 3{,}3\cdot 10^{-7}\,\mathrm{K^{-1}}\,,$$

což je nízká hodnota oproti běžně dostupným materiálům. Teplotu je tedy při měření potřeba stabilizovat a na výrobu používat vhodné materiály. Případně lze tuto změnu také elektronicky korigovat. V tomto mikroskopu je možné dosáhnout atomárního rozlišení, což nám umožňuje zkoumat elektronovou strukturu jednotlivých atomů na povrchu.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha BC ... objevujeme kaluže neznámých planet

Sonda tvaru kvádru o hmotnosti m přistává na zcela neznámé planetě. Přistane do jakési neznámé tekutiny a zůstane v ní plavat tak, že je ponořena do hloubky h a její podstava S je vodorovně. Sonda zvládla změřit, že tlak u spodní podstavy je p, a že atmosférický tlak je zanedbatelný. Také změřila, že hustota tekutiny, ve které je ponořena, roste s hloubkou lineárně (alespoň do hloubky, kam sonda sahá). Jaké je tíhové zrychlení na planetě?

Lego prostě jen chtěl zadat tlakového Archimeda.

Vztlaková sila je len súčet všetkých tlakových síl pôsobiacich na teleso. Sily, ktorými kvapalina tlačí na bočné steny sondy, sa navzájom vyrušia. Ide teda len o rozdiel tlaku na hornú a dolnú podstavu. Nakoľko zadanie hovorí, že atmosférický tlak je zanedbateľný, na hornú podstavu sondy žiadny tlak nepôsobí a ostáva nám teda len spodná podstava. Tá má plochu S a v jej hĺbke je tlak p, takže tlak na ňu pôsobí silou $F_p = Sp$, čo je preto zároveň veľkosť výslednej vztlakovej sily. Tiažová sila pôsobiaca na sondu musí mať rovnakú veľkosť, a keďže hmotnosť sondy poznáme, určíme tiažové zrýchlenie jednoducho ako $g_n = F_g/m = Sp/m$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha BD ... natahujeme kladku

V místnosti o výšce $h = 300\,\mathrm{cm}$ visí ze stropu pružina s klidovou délkou $l_0 = 20\,\mathrm{cm}$ a tuhostí $k = 50\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Na jejím konci je zavěšena nehmotná kladka o poloměru $r = 10\,\mathrm{cm}$, uchycená ve svém středu. Přes kladku přehodíme nehmotné nepružné lano délky $L = 400\,\mathrm{cm}$ a oba jeho konce připevníme k zemi (tak, aby viselo svisle). Jakou silou je lano napínáno?

Lego si chtěl tuto úlohu ukrást, ale potom ji nikdo jiný nepoužil.

Najprv si potrebujeme spočítať, o koľko sa predĺžila pružina. Z lana je πr navinutého na kladke, zvyšok je rovnomerne rozdelený na 2 polovice, ktoré vedú zvislo nadol. Čiže stred kladky sa nachádza vo výške

$$h_1 = \frac{L - \pi r}{2}$$

nad zemou. Tým pádom je dĺžka pružiny $h - h_1$, a teda predĺženie pružiny je $h - h_1 - l_0$.

Z toho si môžeme spočítať silu, ktorou pružina pôsobí na kladku nahor

$$F_k = k\left(h - l_0 - \frac{L - \pi r}{2}\right) .$$

Táto sila sa rozloží rovnomerne na obe strany lana, takže lano bude napínané silou

$$F_T = \frac{k}{2}\left(h - l_0 - \frac{L - \pi r}{2}\right) \doteq 24\,\mathrm{N} .$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha BE ... kvantum vodivosti

Možná jste slyšeli o tzv. Planckových jednotkách, ve kterých by byly fyzikální jednotky definovány jen pomocí univerzálních konstant c, G, k_B a $\hbar$. Pokud bychom k nim přidali i elementární náboj e, mohli bychom seznam možných jednotek dál rozšířit. Zajímavé totiž je, že se některé takto definované jednotky objevují v různých fyzikálních teoriích. Určete hodnotu „Planckovy“ vodivosti v jednotkách SI, která se vyskytuje v teorii tunelového jevu. Uvažujeme opravdu vodivost, nikoli například měrnou vodivost.

Jarda chtěl vymyslet úlohu na rozměrovou analýzu a zrovna se setkal s tímto.

Jelikož nemáme zadaný žádný specifický postup, jak se k této hodnotě dostat, určíme ji z takzvané rozměrové analýzy. Při té se podíváme na jednotky veličin, které máme k dispozici (c, G, k_B, $\hbar$ a e), a zkombinujeme je tak, aby jejich výsledná jednotka byla stejná, jako je jednotka hledané veličiny.

V SI jsou jednotky zadaných veličin tyto

$$
\begin{aligned}
[c] &= \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,\\
[G] &= \mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}\,,\\
[k_\mathrm{B}] &= \mathrm{m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}{\cdot}K^{-1}}\,,\\
[\hbar] &= \mathrm{m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-1}}\,,\\
[e] &= \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

a vodivost má jednotku

$$[\sigma] = \Omega^{-1} = \mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^1{\cdot}C^2}\,.$$

Hned ze začátku vidíme, že ve výsledném vztahu není jednotka kelvin, takže není potřeba použít Boltzmannovu konstantu. Zároveň je zde kvadrát coulombu, takže ve hledaném vztahu bude určitě e^2. Nyní bychom mohli napsat tři rovnice o třech neznámých, abychom zjistili, jaké exponenty musí být pro rychlost světla, gravitační konstantu a redukovanou Planckovu konstantu, aby jejich vzájemné násobky daly dohromady zbytek vodivosti. Všimněme si ale, že tento zbytek je roven převrácené jednotce redukované Planckovy konstanty. Kvantum vodivosti tak jednoduše můžeme zapsat jako

$$\sigma_\mathrm{kvant} = \frac{e^2}{\hbar}\,, \quad [\sigma_\mathrm{kvant}] = \mathrm{C^2} \cdot \left(\mathrm{m^2{\cdot}kg{\cdot}s^{-1}}\right)^{-1} = \mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^1{\cdot}C^2}\,.$$

Po číselném dosazení

$$\sigma_\mathrm{kvant} = \frac{e^2}{\hbar} \doteq 2{,}43 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^1{\cdot}C^2} = 2{,}43 \cdot 10^{-4}\,\Omega^{-1}\,.$$

Pro zajímavost, toto je hodnota z makroskopického světa, která odpovídá rezistoru o odporu asi $4\,\mathrm{k\Omega}$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha BF ... pokus o sebe(ne)zastřelení

Kolik času máte na to, abyste se na planetě či měsíci bez atmosféry vyhnuli kulce, kterou vystřelíte? Střílíte tak, aby kulka byla v konstantní (a zanedbatelné) výšce nad povrchem dokonale kulového tělesa o poloměru R a hmotnosti M, na kterém stojíte.

Karel měl určité náměty.

Gravitačná sila priťahujúca guľku ku stredu planéty bude

$$F_G = G\frac{Mm}{R^2}\,,$$

kde G je Newtonova gravitačná konštanta a m je hmotnosť guľky. Žiadna iná sila by na guľku nemala pôsobiť. Takže ak chceme, aby guľka letela po kružnici s polomerom R, musíme ju vystreliť takou rýchlosťou v, pre ktorú sa bude príslušná dostredivá sila $F_d = mv^2/R$ rovnať gravitačnej sile. Dáme teda tieto 2 sily do rovnosti

$$F_G = F_d\,,$$
$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R}\,,$$
$$\sqrt{G\frac{M}{R}} = v\,.$$

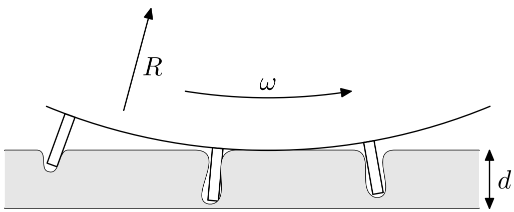
Vzdialenosť, ktorú guľka preletí, kým nás trafí je $s = 2\pi R$, takže čas, ktorý máme na vyhnutie sa je

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{G\frac{M}{R}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha BG ... peristaltická pumpa

Mějme tenkou hadičku z velmi ohebného materiálu o vnitřním průměru d. Ta vede skrz peristaltickou pumpu, v níž je rotující kruh, který má po obvodu rovnoměrně rozmístěných N tyček. Rotačním pohybem celého kruhu stláčí tyčky hadičku a posouvají vodu dopředu (viz obrázek). Určete, s jakou frekvencí f se musí kruh o poloměru R točit, aby hadičkou tekl objemový průtok Q. Uvažujte $d \ll R$ a stlačený objem hadičky zanedbejte.



Takové pumpy dodávají vodu do elektrolyzérů u Jardy v laboratoři.

Voda se v hadičce posouvá stejnou rychlostí, jako je obvodová rychlost kruhu, která je $v = 2\pi fR$.

Objemový průtok tak je

$$Q = Sv = \frac{\pi d^2}{4} 2\pi Rf = \frac{\pi^2}{2} Rd^2 f\,.$$

Odsud můžeme vyjádřit frekvenci f jako

$$f = \frac{2Q}{\pi^2 Rd^2}\,.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha BH ... ananas na pizzu

Plátky ananasu byly se stejnou počáteční rychlostí hozeny pod úhly $\alpha = 38^\circ$, $\beta = 45^\circ$ a $\gamma = 52^\circ$ vůči vodorovnému směru tak, že všechny dopadly na pizzu, která má poloměr 16 cm a jejíž střed je vzdálený 3,0 m od místa vyhození. Určete interval počátečních rychlostí, pro které všechny tři plátky dopadnou na pizzu. *Davidovi se o Hawaii už i zdá.*

Plátky ananasu byly hozeny pod $\alpha = 38^\circ$, $\beta = 45^\circ$ a $\gamma = 52^\circ$, jedná se tudíž o šikmý vrh. Pro vzdálenost dopadu od místa hodu při šikmém vrhu můžeme jednoduše odvodit

$$D = \frac{v_0^2 \sin(2\xi)}{g}\,,$$

pro obecný úhel ξ. Označme si vzdálenost pizzy jako s a poloměr pizzy r, poté je interval povolené vzdálenosti D, do které mohou plátky spadnout, roven $[s - r;\ s + r]$. Dále si můžeme všimnout, že $\sin(2\alpha) = \sin(2\gamma)$, tudíž nám stačí spočítat dovolené počáteční rychlosti

$$v_0 = \sqrt{\frac{Dg}{\sin(2\xi)}}$$

pouze pro dva úhly.

Po dosazení krajních povolených hodnot D pro úhel α a γ je interval počáteční rychlosti v_α

$$v_\alpha \in [5{,}4;\ 5{,}7]\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

a pro úhel β interval počáteční rychlosti v_β

$$v_\beta \in [5{,}3;\ 5{,}6]\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Naše výsledná rychlost v se tudíž bude pohybovat v průniku intervalů v_α a v_β, neboli

$$v \in [5{,}4;\ 5{,}6]\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

David Ševčík
david.sevcik@fykos.cz

Úloha CA ... tvrdý náraz

Sledujeme dvě stejná auta jedoucí stejným směrem po dálnici. Jedno jede rychlostí $v_1 = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, druhé $v_2 = 130\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Ve chvíli, kdy je rychlejší auto při předjíždění na stejné úrovni jako pomalejší, si oba řidiči všimnou, že je před nimi překážka. Oba dva začnou brzdit maximální brzdnou silou, která je u obou aut stejná a konstantní. Pomalejšímu autu se podaří zastavit těsně před překážkou. Jakou rychlostí narazí druhé auto do překážky?

Karel se díval na videa.

Nakoľko prvé auto zastavilo tesne pred prekážkou, urazilo dráhu s. Takú istú dráhu má druhé auto na zabrzdenie. Označme si hmotnosť auta m, potom brzdná sila $F = ma$ vykoná prácu $W = Fs$ (u oboch áut rovnakú). Pomalšie auto stratí celú svoju kinetickú energiu

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = Fs\,,$$

z čoho môžeme ďalej spočítať výslednú rýchlosť druhého auta v_f zo zmeny jeho kinetickej energie

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{f} = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} \doteq 102\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha CB ... pes, který štěká, nekouše

Jardovi psi jsou nevychovaní a štěkají na cyklisty jedoucí kolem nich. Jeden takový cyklista jedoucí směrem k nim slyšel jejich štěkání s periodou $T_1 = 1{,}4\,\mathrm{s}$. Poté prosvištěl těsně kolem nich a následně jejich štěkání slyšel naštěstí už jen s periodou $T_2 = 1{,}5\,\mathrm{s}$. Určete rychlost cyklisty, jestliže se pohyboval rovnoměrně přímočaře a Jardovi psi štěkají s konstantní periodou.

Jardovi při online výuce štěkali psi.

Jedná se o klasický Dopplerův jev. Označme rychlost zvuku ve vzduchu $c = 343\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, rychlost cyklisty v a periodu štěkání T. Frekvence štěkotu je tedy $f = 1/T$. Při přibližování cyklisty je frekvence, kterou slyší, rovna

$$f_1 = f\left(1 + \frac{v}{c}\right)\,,$$

naopak při vzdalování je to

$$f_2 = f\left(1 - \frac{v}{c}\right)\,.$$

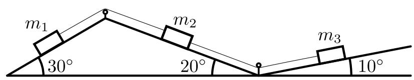
Vydělením jedné rovnice druhou a přeskupením členů dostáváme

$$v = c\frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} = c\frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2}\,,$$

takže rychlost cyklisty je $v \doteq 12\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha CC ... cik-cak kopce



Mějme tři nakloněné roviny. První stoupá se sklonem $\alpha_1 = 30^\circ$, po ostrém maximu se překlopí do další, která klesá se sklonem $\alpha_2 = 20^\circ$. Ta se po ostrém minimu překlopí do roviny stoupající se sklonem $\alpha_3 = 10^\circ$. Na příslušných rovinách se nacházejí kvádry o hmotnostech $m_1 = 20\,\mathrm{kg}, m_2 = 10\,\mathrm{kg}, m_3 = 15\,\mathrm{kg}$, které jsou propojeny nehmotnými lany a kladkami (lana jdou vždy rovnoběžně s kopcem, viz obrázek). S jakou velikostí zrychlení se bude pohybovat kvádr o hmotnosti m_3? Tření neuvažujte.

Lego byl na hřebenovce.

Nakoľko trenie neuvažujeme, stačí nám pre každý kváder brať do úvahy len sily rovnobežné s naklonenou rovinou, na ktorej sú. Označíme si pnutie v lane medzi m_1 a m_2 ako T_{12} a medzi m_2 a m_3 ako T_{23}. Potom pohybová rovnica pre prvý kváder bude

$$m_1 g \sin\alpha_1 - T_{12} = m_1 a_1\,,$$

kde za kladný považujeme smer dolu kopcom.

Pre druhý kváder označíme za kladný smer ten hore kopcom, aby bolo a_2 kladné práve vtedy, keď a_1. Potom jeho pohybová rovnica bude

$$T_{12} - T_{23} - m_2 g \sin\alpha_2 = m_2 a_2 \,,$$

a na záver pre tretí kváder označíme ako kladný zase smer nadol

$$m_3 g \sin\alpha_3 + T_{23} = m_3 a_3 \,.$$

Máme zatiaľ 3 rovnice a 5 neznámych $a_1, a_2, a_3, T_{12}, T_{23}$. Zostáva použiť lano, a síce predpoklad, že sa nemôže naťahovať, teda $a_1 = a_2$ (4. rovnica) a ak bude naozaj stále napnuté (čo sme doteraz predpokladali), tak aj $a_2 = a_3$. Poďme to najprv dopočítať s týmito rovnicami a potom sa zamyslíme nad výsledkom. Po dosadení vzťahov medzi zrýchleniami dostávame sústavu

$$\begin{aligned} m_1 g \sin\alpha_1 - T_{12} &= m_1 a_3 \\ T_{12} - T_{23} - m_2 g \sin\alpha_2 &= m_2 a_3 \\ m_3 g \sin\alpha_3 + T_{23} &= m_3 a_3 \,. \end{aligned}$$

Keď všetky rovnice sčítame, automaticky sa zbavíme pnutí a dostaneme celkom intuitívny výsledok

$$\begin{aligned} m_1 g \sin\alpha_1 - m_2 g \sin\alpha_2 + m_3 g \sin\alpha_3 &= (m_1 + m_2 + m_3) a_3 \\ \Rightarrow \quad a_3 &= g \frac{m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2 + m_3 \sin\alpha_3}{m_1 + m_2 + m_3} \,. \end{aligned}$$

Jedna možnosť, ako zistiť, či použité predpoklady naozaj platia, by bola dosadiť a_3 naspäť do tretej pohybovej rovnice a vypočítať hodnotu T_{23}. Ak je kladná, znamená to, že lano je skutočne napnuté a ťahá kvádre touto silou, ak je však T_{23} záporná, znamená to, že v našich rovniciach lano "tlačí" kvádre, čo v praxi nemôže nastať, a teda náš predpoklad o tom, že lano bude napnuté nie je pravdivý.

Nemusíme ale dosádzať a dlho upravovať, stačí si len T_{23} najprv vyjadriť

$$T_{23} = m_3 (a_3 - g \sin\alpha_3)$$

a vidíme, že bude kladné, ak $a_3 > g \sin\alpha_3$ a inak záporné. To dáva zmysel, ak si uvedomíme, že $g \sin\alpha_3$ je zrýchlenie, akým by kváder zrýchľoval dolu kopcom, ak by nebol ničím ťahaný ani brzdený. Nakoľko lano vie ťahať, tak ak nám vyšlo a_3 väčšie ako táto hodnota, znamená to, že skutočne ťahalo. Naopak, ak nám vyšlo $a_3 < g \sin\alpha_3$, tak nám vyšiel nefyzikálny výsledok, nakoľko lano nemá tretí kváder ako brzdiť a v takom prípade je správny výsledok $g \sin\alpha_3$.

Zostáva nám teda dosadiť

$$\begin{aligned} a_3^{(\text{napnuté})} &= g \frac{m_1 \sin\alpha_1 - m_2 \sin\alpha_2 + m_3 \sin\alpha_3}{m_1 + m_2 + m_3} \doteq 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \,, \\ a_3^{(\text{voľné})} &= g \sin\alpha_3 \doteq 1{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \,. \end{aligned}$$

A tak

$$a_3^{(\text{napnuté})} > a_3^{(\text{voľné})} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_3^{(\text{napnuté})} \doteq 2{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha CD ... náledí

Jak velkou plochu jsme schopni rozmrazit pomocí $30\,\mathrm{l}$ *butanové láhve o tlaku* $0{,}20\,\mathrm{MPa}$*? Butan v láhvi má teplotu* $20\,^\circ\mathrm{C}$ *a molární hmotnost* $58\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$*. Hoření butanu má specifickou energii* $46\,\mathrm{MJ\cdot kg^{-1}}$*. Námraza je tvořena vrstvou ledu s hustotou* $\rho_{\mathrm{led}} = 916{,}8\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$*, měrnou tepelnou kapacitou* $c = 2\,090\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$ *a tloušťkou* $1{,}0\,\mathrm{cm}$*. Protože je zima, má námraza (i okolní vzduch) teplotu* $-5{,}0\,^\circ\mathrm{C}$*. Uvažujte dokonalý přenos tepla a butan v láhvi jako ideální plyn.*

David viděl, jak se v Praze odmrazují chodníky.

Nejprve chceme zjistit, kolik energie můžeme z butanové láhve získat. Na to budeme potřebovat zjistit, jaké je látkové množství n butanu v láhvi. Na to použijeme stavovou rovnici ideálního plynu

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{pV}{RT}\,,$$

kde p je tlak v láhvi, V objem láhve, T teplota a R je molární plynová konstanta, kterou najdeme v konstantovníku. Z toho můžeme vypočítat hmotnost m pomocí molární hmotnosti M jako

$$m = Mn\,.$$

Teď už vypočítáme energii $E_{\text{láhev}}$ kterou z láhve získáme jako

$$E_{\text{lahev}} = mH = HM\frac{pV}{RT} \doteq 6{,}6\,\mathrm{MJ}\,,$$

kde H je specifická energie hoření butanu.
Teplo, které budeme potřebovat na rozmrazení chodníku, určíme kalorimetrickou rovnicí

$$Q(S) = m_{\mathrm{l}}(S)\,c\Delta t + m_{\mathrm{l}}(S)\,l_{\mathrm{t}}\,,$$

kde c je měrná tepelná kapacita ledu, Δt teplotní nárůst potřebný pro rozmrazení ledu a l_{t} je skupenské teplo tání. Pro hmotnost ledové plochy m_{l} (v závislosti na ploše) pak platí

$$m_{\mathrm{l}}(S) = \rho_{\mathrm{led}}dS\,,$$

kde ρ_{led} je hustota ledu, d výška námrazy a S je plocha. Nyní položíme rovnost mezi energií v butanové láhvi a energií potřebnou na rozmrazení chodníku. Dostáváme

$$\begin{aligned} E_{\text{láhev}} &= Q(S) \\ HM\frac{pV}{RT} &= \rho_{\mathrm{led}}dS\left(c\Delta t + l_{\mathrm{t}}\right)\,. \end{aligned}$$

Z čehož už lehce vyjádříme plochu S jako

$$S = \frac{HM}{\rho_{\mathrm{led}}d}\frac{pV}{RT}\frac{1}{c\Delta t + l_{\mathrm{t}}} \doteq 2{,}1\,\mathrm{m^2}\,.$$

Vidíme tedy, že tento způsob odmrazování je značně neefektivní, a proto se na odmrazování používají v praxi (většinou) jiné metody.

David Škrob
`david.skrob@fykos.cz`

Úloha CE ... vozíčkář

Vozíčkář dokáže na každé kolo svého vozíčku působit silou F. Hmotnost každého kola je m, jejich poloměr je R a hmotnost vozíčkáře a zbytku vozíčku je M. Jaký největší úhel nakloněné roviny dokáže sám překonat? Uvažujte, že kola se po podložce nepřesmykují a že se invalida nemůže překlopit. *Jarda tlačil svou babičku do kopce.*

Keď stojí vozíčkar na naklonenej rovine so sklonom α, jeho ťažisko sa (vo všeobecnosti) nenachádza priamo nad bodom dotyku jeho kolies s touto rovinou. Preto, keďže s kolesami je prepojený len voľne otočnou osou, svojou tiažovou silou Mg pôsobí vo zvislom smere na túto os. Rovnako to bude aj s tiažou otočnej časti vozíčku (celý vozíček až na kolesá). Kolesá zase majú ťažisko vo svojom strede, takže pôsobisko ich tiaže bude taktiež na ich osi. Celkovo teda pôsobí na os kolies sila $(M+2m)g$ a vzhľadom na bod ich dotyku so zemou tak vytvára moment sily $(M+2m)gR\sin\alpha$.

Keď začne vozíčkar pôsobiť na okraj svojho kolesa silou F, vyvinie tým moment sily veľkosti FR okolo osi tohto kolesa. Keďže ale kolesá neprešmykujú a naklonená rovina je nehybná, celkovo tým vznikne reakčný moment veľkosti $2FR$ okolo bodu dotyku, kde koeficient 2 vyjadruje príspevok od oboch kolies. Na to, aby sa vozíčkar pohyboval nahor, potrebuje mať teda splnenú podmienku $2FR \geq (M+2m)\,gR\sin\alpha$, z čoho vyplýva hraničný uhol

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2F}{(M+2m)g}\right) .$$

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha CF ... rychlík v oblouku

Rychlík jede na trati se stálou rychlostí $v = 100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ a vjíždí do oblouku o poloměru $r = 1\,000\,\mathrm{m}$. O kolik milimetrů musí být vnější kolejnicový pás výš než vnitřní, aby výslednice sil působila kolmo k rovině kolejí? Koleje mají rozchod $d = 1\,435\,\mathrm{mm}$ a jejich úhel naklopení vůči vodorovné zemi je malý. *Prokop už chtěl před Vánoci domů...*

Na rychlík o hmotnosti m projíždějící obloukem působí odstředivá síla o velikosti

$$F_\mathrm{o} = \frac{mv^2}{r} ,$$

která je kolmá na tíhovou sílu F_G o velikosti mg. Výsledná síla svírá úhel α s tíhovou silou a platí

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{G}} .$$

Aby výslednice sil působila kolmo k rovině kolejí, musí být koleje naklopeny o úhel α vůči vodorovné zemi a platí

$$\sin\alpha = \frac{h}{d} ,$$

kde h je hledané převýšení koleje a d je rozchod kolejí. Pro malé úhly lze psát $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha \approx \sin\alpha$ a tedy

$$\frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{G}} = \frac{h}{d} ,$$

z čehož vyjádříme

$$h = \frac{F_\mathrm{o} d}{F_\mathrm{G}} = \frac{v^2 d}{rg} \doteq 113\,\mathrm{mm}\,.$$

Prokop Bernard
prokop.bernard@fykos.cz

Úloha CG ... berušky lezly

Po ramenech pravého úhlu lezou dvě berušky. Po jednom rameni leze první beruška směrem k vrcholu ze vzdálenosti $l_0 = 30\,\mathrm{cm}$ rychlostí $u = 1{,}0\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$, druhá leze z vrcholu směrem od něj po druhém rameni rychlostí $v = 1{,}5\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Po jaké době od začátku pohybu si budou berušky nejblíže? *Pepa bez ostychu kradl úlohy z prvácké mechaniky.*

Označme si vzdálenost berušek jako S a vzdálenosti berušek od vrcholu postupně jako l a s. Protože se berušky pohybují po pravoúhlém trojúhelníku, můžeme S vyjádřit pomocí Pythagorovy věty jako

$$S = \sqrt{l^2 + s^2}\,.$$

Zde jsou ovšem vzdálenosti berušek od vrcholu závislé na čase, konkrétně jako

$$l(t) = l_0 - ut\,,$$
$$s(t) = vt\,,$$

tedy vztah pro S můžeme rozepsat jako

$$S(t) = \sqrt{(l_0 - ut)^2 + v^2 t^2}\,.$$

Minimální vzdálenost nalezneme hledáním extrému funkce $S = S(t)$. Zderivujeme-li ji podle času, dostáváme

$$\dot{S}(t) = \frac{v^2 t + u(ut - l_0)}{\sqrt{(l_0 - ut)^2 + v^2 t^2}}\,.$$

Derivaci položíme rovnou nule

$$\dot{S}(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{u l_0}{u^2 + v^2}\,,$$

a dosazením hodnot ze zadání dostáváme řešení [2]

$$t_0 \doteq 9{,}2\,\mathrm{s}\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

[2] Úplně správně bychom měli ještě ověřit, že se skutečně jedná o minimum a nikoliv o maximum vzdálenosti. To můžeme ověřit například druhou derivací S, alternativně nám stačí podívat se na tvar S a všimnout si, že tato funkce musí nutně do jistého t_0 klesat a po jeho překročení růst "do nekonečna" (ovšem vztah platí jen dokud první beruška nedoleze do vrcholu trojúhelníka). To implikuje, že v t_0 musí být skutečně minimum.

Úloha CH ... létající chobotnice

Martin si na noční tržnici na Filipínách koupil plyšovou chobotnici o hmotnosti $m = 90\,\mathrm{g}$*. Bylo mu ale líto, že je chobotnice tak malá, že z krás světa téměř nic neuvidí. Rozhodl se jí tedy rozšířit obzory. Vzal ulomenou tyč od vystřelovacího deštníku, kterou můžeme aproximovat pružinou o tuhosti* $k = 25\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$*, a nasadil na ni chobotnici. Tyč pak stlačil o délku* $d = 15\,\mathrm{cm}$ *a pustil ji tak, že chobotnice vyletěla přímo vzhůru. O kolik metrů se chobotnici rozšířil obzor v nejvyšším bodě jejího letu oproti tomu, když jen seděla na nestlačené deštníkové tyči? Ptáme se, o kolik se zvýšila maximální vzdálenost měřená podél zemského povrchu, do které mohla chobotnice dohlédnout v jednom směru. Předpokládejme, že je Země dokonalá koule a Martin držel tyčku deštníku tak, že se chobotnice v momentě, kdy byla tyčka stlačená, nacházela ve výšce* $h_0 = 1{,}5\,\mathrm{m}$ *nad zemským povrchem.* *Martin se snažil zabavit svou chobotnici.*

Nejprve spočteme výšku, do které chobotnice vyletí. Ze zákona zachování energie (veškerá potenciální energie v pružině přejde do gravitační potenciální energie chobotnice) máme

$$\frac{1}{2}kd^2 = E = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{kd^2}{2mg} \approx 31{,}9\,\mathrm{cm}\,.$$

Radiální vzdálenost, kam chobotnice uvidí, je $c = R_\mathrm{Z}\varphi$, kde R_Z je poloměr Země a φ úhel mezi dvěma polopřímkami, které procházejí středem Země – na první leží trajektorie chobotnice a na té druhé bod, kam chobotnice na zemském povrchu nejdále dohlédne. Úhel φ snadno vypočítáme z pravoúhlého trojúhelníku jako $\cos\varphi = \frac{R_\mathrm{Z}}{H}$, kde H je vzdálenost chobotnice od středu Země v nejvyšším bodě letu.

Zjevně platí $H = R_\mathrm{Z} + h + h_0$, pak dostáváme

$$c = R_\mathrm{Z} \arccos\left(\frac{R_\mathrm{Z}}{H}\right) = R_\mathrm{Z} \arccos\left(\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + h + h_0}\right)\,.$$

Ve chvíli, kdy chobotnice pouze sedí na tyčce, máme místo h výšku d, tedy

$$c_d = R_\mathrm{Z} \arccos\left(\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + d + h_0}\right)\,.$$

Rozdíl $\Delta c = c - c_d$ je pak hledaná vzdálenost, o kterou chobotnice uvidí dál. Platí tedy

$$\Delta c = c - c_d = R_\mathrm{Z}\left[\arccos\left(\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + h + h_0}\right) - \arccos\left(\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + d + h_0}\right)\right] \doteq 0{,}23\,\mathrm{km}\,.$$

Chobotnici se tedy rozšíří obzory o zhruba 230 metrů.

Martin Vaněk
`martin.vanek@fykos.cz`

Úloha DA ... ananas na pizzu reloaded

David hodil proti sobě dva plátky ananasu o hmotnostech $m_1 = 0{,}30\,\mathrm{kg}$ *a* $m_2 = 0{,}60\,\mathrm{kg}$ *nad pizzou o poloměru* $16\,\mathrm{cm}$*. Tyto dva ananasy se srazily dokonale nepružnou srážkou ve výšce* $50\,\mathrm{cm}$ *nad středem pizzy tak, že v momentě srážky byly jejich vertikální složky rychlosti nulové. Jakou nejvyšší rychlost* v_2 *může mít těžší plátek před srážkou, jestliže se při srážce ztratilo* $70\,\%$ *energie a oba plátky dopadly na pizzu? Určete také, jakou velikost rychlosti* v_1 *bude mít v tomto případě lehčí plátek. Uvažujte, že se při dokonale nepružné srážce plátky spojí v jeden.*
Davidovi slíbili, že mu za tuhle úlohu dovezou ananas v plechovce.

Abychom zjistili, jakou nejvyšší rychlostí se těžší plátek může pohybovat, aby oba plátky dopadly na pizzu, musíme zjistit, jakou celkovou rychlostí mohly letět oba ananasy dohromady. To zjistíme pomocí rovnice vodorovného vrhu s výškou $h = 0{,}50\,\mathrm{m}$ a maximální vzdáleností, kam mohou dopadnout, $D = 0{,}16\,\mathrm{m}$

$$D = v \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

z čehož vyjádříme v jako

$$v = D \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$

Jelikož se jedná o dokonale nepružnou srážku (plátky se slepí), neplatí zákon zachování energie, nýbrž zákon zachování hybnosti. Dostáváme tedy další rovnici pro velikosti rychlostí

$$v_1 \cdot m_1 - v_2 \cdot m_2 = -v \cdot (m_1 + m_2)\,.$$

V rovnici jsme zavedli znaménkovou konvenci, při které je směr rychlosti v_1 kladný a směr rychlosti v_2 záporný. Protože po srážce očekáváme pohyb plátků ve směru v_2, projeví se to v rovnici záporným znaménkem na pravé straně. Z této rovnice můžeme vyjádřit v_1

$$v_1 = \frac{-(m_1 + m_2) \cdot v + m_2 \cdot v_2}{m_1}\,.$$

Vyjádříme ještě ztrátu kinetické energie

$$E_{\mathrm{k0}} - E_{\mathrm{k}} = 0{,}7 \cdot E_{\mathrm{k0}}\,,$$

kde E_{k0} je celková kinetická energie obou plátků před srážkou, neboli

$$E_{\mathrm{k0}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2\,,$$

a E_{k} je energie po srážce

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v^2\,.$$

Po úpravě získáme

$$0{,}3 \cdot E_{\mathrm{k0}} - E_{\mathrm{k}} = 0\,.$$

Po dosazení rychlostí v a v_1 dostáváme

$$\frac{3}{20} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{-(m_1 + m_2) \cdot D\sqrt{\frac{g}{2h}} + m_2 \cdot v_2}{m_1}\right)^2 + \frac{3}{20} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot D^2 \cdot \frac{g}{2h} = 0\,,$$

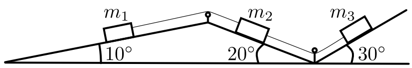
což po úpravách vede na kvadratickou rovnici v obecném tvaru

$$v_2^2 \cdot \left(m_2 \cdot m_1 + m_2^2\right) - v_2 \cdot \left(2 \cdot m_2 \cdot D \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}} \cdot (m_1 + m_2)\right) +$$
$$- \left(\frac{10}{3} \cdot (m_1 + m_2) \cdot D^2 \cdot \frac{g}{2h} \cdot m_1 - (m_1 + m_2)^2 \cdot D^2 \cdot \frac{g}{2h}\right) = 0\,.$$

Volíme kladný kořen, protože záporná velikost rychlosti by neměla fyzikální smysl. Po dosazení vidíme, že velikost rychlosti těžšího plátku je $v_2 \doteq 1{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a z rovnice zákona zachování hybnosti poté dostaneme, že velikost rychlosti lehčího plátku je $v_1 \doteq 0{,}58\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

David Ševčík
david.sevcik@fykos.cz

Úloha DB ... cak-cik kopce



Mějme tři nakloněné roviny. První stoupá se sklonem $\alpha_1 = 10^\circ$, po ostrém maximu se překlopí do další, která klesá se sklonem $\alpha_2 = 20^\circ$. Ta se po ostrém minimu překlopí do roviny stoupající se sklonem $\alpha_3 = 30^\circ$. Na příslušných rovinách se nacházejí kvádry o hmotnostech $m_1 = 20\,\mathrm{kg}, m_2 = 10\,\mathrm{kg}, m_3 = 15\,\mathrm{kg}$, které jsou propojeny nehmotnými lany a kladkami (lana jdou vždy rovnoběžně s kopcem, viz obrázek). S jakou velikostí zrychlení se bude pohybovat kvádr o hmotnosti m_3? Tření neuvažujte. *Na hřebenovce byl Lego.*

Postup riešenia je úplne analogický postupu v úlohe *cik-cak kopce*. Jediný rozdiel sa nachádza v poslednom kroku, teda v dosadení hodnôt do inak identických konečných vzťahov. Pre hodnoty v tejto úlohe dostávame $a_3^{(\text{napnuté})} \doteq 1{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a $a_3^{(\text{voľné})} \doteq 4{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Z podmienky pre napnutie lana dostávame výsledok

$$a_3^{(\text{napnuté})} < a_3^{(\text{voľné})} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_3^{(\text{voľné})} \doteq 4{,}9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha DC ... nakloněný válec na nakloněné rovině

Válec na nakloněné rovině je klasická učebnicová úloha. Co když ale nakloníme i válec oproti sklonu roviny? Homogenní válec položíme na nakloněnou rovinu směrem se sklonem roviny, ale pak jej kolem kolmice na rovinu otočíme o 45° a pustíme. Jaká bude velikost rychlosti, kterou se bude pohybovat po čase t? Rovina je nakloněna vůči horizontálnímu směru o 30°. Předpokládejte, že válec neprosmykuje. *S Jardou to jde šikmo z kopce.*

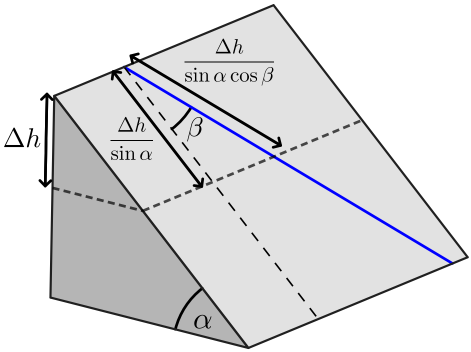
Valec bude vykonávať valivý pohyb (okrem translačného pohybu bude aj rotovať), takže jeho kinetická energia sa bude skladať z translačnej a rotačnej zložky. Moment zotrvačnosti homogénneho valca s hmotnosťou m a polomerom R je $I = mR^2/2$. Ak bude rotovať uhlovou rýchlosťou ω, jeho rotačná kinetická energia bude $I\omega^2/2 = mR^2\omega^2/4$. Keďže navyše vieme, že neprešmykuje, pre jeho rýchlosť platí $v = R\omega$. Ak sa teda valec po rovine presunie nižšie o nejakú výšku Δh, premenou z potenciálnej energie nadobudne kinetickú energiu

$$\begin{aligned} mg\Delta h &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{3}{4}mv^2 \\ \Longrightarrow \qquad v &= \sqrt{\frac{4}{3}g\Delta h}\,. \end{aligned}$$

Keďže neprešmykuje v žiadnom bode dotyku s rovinou, bude sa po celú dobu pohybovať po priamke danej jeho počiatočnou orientáciou.

Označme si sklon roviny ako $\alpha = 30^\circ$ a odklon valca na naklonenej rovine ako $\beta = 45^\circ$. Ak sa valec vo vertikálnom smere posunul o Δh, v smere roviny to bude $\Delta h/\sin\alpha$. Jeho skutočná trajektória je ale odklonená ešte o uhol β aj od tohto smeru, celkovo sa teda posunie o $\Delta h/(\sin\alpha\cos\beta)$. Ak si túto dráhu označíme ako l, pre jeho rýchlosť v tomto smere bude platiť

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gl\sin\alpha\cos\beta} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}gl}\,.$$



Obrázek 1: Pohľad na trajektóriu valca.

Na to, aby sme našli závislosť rýchlosti na čase by sme teraz mohli riešiť uvedenú diferenciálnu rovnicu pre $l(t)$. My si ale pomôžeme analógiou so vzťahom pre rýchlosť voľného pádu – stačí v ňom upraviť hodnotu tiažového zrýchlenia na $g' = (\sqrt{2}/6)g$. Z tejto analógie dostávame závislosť

$$v(t) = g't = \frac{2}{3}gt\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{6}gt\,.$$

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha DD ... vypasený kosmonaut

Kosmonaut přebývá na základně na pólu planety Xeno, jejíž hustota je $\rho = 2\,707\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Každé ráno se váží na své pozemské váze a velmi se trápí tím, jakou hodnotu mu ukazuje. Aby se cítil lépe, přesunul se na základnu nacházející se na rovníku planety, kde pak s radostí zjistil, že váží 1,69krát méně než na pólu. Jak dlouhý je na planetě den? *Petr by naopak rád přibral.*

Označme m_p a m_r kosmonautovu váhu na pólu a na rovníku planety. Neboť je zadáno

$$m_\mathrm{r} = \frac{m_\mathrm{p}}{1{,}69}\,,$$

musí být poměr mezi váhou na pólu a na rovníku

$$\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{r}} = 1{,}69\,.$$

Pro následující výpočty bude výhodné si převrácenou hodnotu tohoto poměru označit jako μ.

Neboť váha je ze zadání pozemská, určuje kosmonautovu váhu jako podíl gravitační síly, kterou na něj působí planeta a tíhového zrychlení na Zemi g.

$$m_\mathrm{p} = \frac{G\frac{mM}{R^2}}{g}\,,$$

kde G je gravitační konstanta, m kosmonautova hmotnost na Zemi (setrvačná hmotnost) a R poloměr planety Xeno.

Váha na rovníku se spočítá podobně, ovšem s tím rozdílem, že na rovníku na kosmonauta působí také nenulová odstředivá síla způsobená otáčením planety. Odstředivá síla má velikost

$$F_\mathrm{o} = \omega^2 R m \,,$$

a protože platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \,,$$

kde T je perioda otáčení (tedy délka jednoho dne) planety, můžeme psát

$$F_\mathrm{o} = \frac{4\pi^2}{T^2} R m \,.$$

Váha kosmonauta na rovníku tedy je

$$m_\mathrm{r} = \frac{G\frac{mM}{R^2} - \frac{4\pi^2}{T^2} R m}{g} \,.$$

Podělíme-li rovnici prvním členem napravo, dostáváme

$$\frac{m_\mathrm{r} g}{G\frac{mM}{R^2}} = 1 - \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 G M} \,,$$

$$\mu = 1 - \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 G M} \,,$$

neboť výraz vzniklý nalevo je přesně převrácený poměr μ. Vyjádříme-li T^2, máme

$$T^2 = \frac{1}{(1-\mu)} \frac{4\pi^2 R^3}{G M} \,.$$

Neznáme však hmotnost planety M ani její poloměr R. Rovnici však můžeme kosmetickou úpravou převést na tvar

$$T^2 = \frac{3\pi}{(1-\mu) G} \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{M} \,,$$

ze kterého si již není těžké všimnout, že jsme napravo dostali převrácenou hodnotu hustoty ρ. Rovnici tedy upravíme

$$T^2 = \frac{3\pi}{(1-\mu) G \rho} \,,$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{(1-\mu) G \rho}} \,,$$

a dosazením hodnot získáme výsledek

$$T \doteq 1{,}13 \cdot 10^4\,\mathrm{s} \doteq 3{,}14\,\mathrm{h} \,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha DE ... divoký kolotoč

Pepa položil závaží o hmotnosti m na dokonale hladkou vodorovnou rovinu a připojil k němu jeden konec nehmotné ideální pružiny. Následně si druhý konec vzal do ruky a začal se závažím v této vodorovné rovině točit konstantní úhlovou rychlostí ω.

Při překročení určité velikosti ω mu však závaží odlétlo do nekonečna. Jaká je tato maximální úhlová rychlost, se kterou se může závaží otáčet po kružnici? Pružina má tuhost k a klidovou délku l_0.

Pepa kradl z učebnice.

Pokud se těleso zavěšené na pružině pohybuje v rovině po kružnici s poloměrem r, rovná se (co do velikosti) síla pružnosti od pružiny F_p a odstředivá síla F_o (z pohledu neinerciálního systému spojeného s tělesem)

$$F_\mathrm{p} = k\,(r - l_0) = m\omega^2 r = F_\mathrm{o}\,.$$

Z toho snadno vyjádříme poloměr kružnice jako

$$r = \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}\,.$$

Vidíme, že pro kladné r musí být výraz ve jmenovateli také kladný, z čehož plyne omezení na ω ve tvaru

$$1 - \frac{m\omega^2}{k} > 0 \qquad \Rightarrow \quad \omega < \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_\mathrm{max}\,.$$

Pro hodnoty $\omega \to \omega_\mathrm{max}^+$ blížící se k maximu zprava dostáváme $r \to +\infty$.

Pro zajímavost uvedeme diskuzi dalších případů. Pokud se těleso netočí ($\omega = 0\,\mathrm{Hz}$), je $r = l_0$, kde v tomto případě má r význam délky pružiny (ne poloměru kružnice, protože se těleso po žádné netočí). Stejný výsledek dostaneme i pro nekonečně tuhou pružinu $k \to +\infty$, pro jakoukoliv ω bude $r = l_0$, pružina se tedy chová jako „tuhá“ tyč.

Josef Trojan
josef.trojan@fykos.cz

Úloha DF ... P-roblematická trouba

Anežka chtěla Jardovi upéct dort, potřebovala tedy roztopit troubu na teplotu T_s. V troubě je teploměr, který porovnává nastavenou teplotu s reálnou teplotou uvnitř T. Regulátor nastavuje topný výkon trouby tak, že je úměrný rozdílu těchto dvou teplot s konstantou úměrnosti K. Jestliže je teplota místnosti i trouby na začátku ohřívání T_a, na jaké teplotě se vnitřek trouby ustálí? Trouba ztrácí teplo výkonem $\kappa\,(T - T_\mathrm{a})$ a její tepelná kapacita je C.

Jarda zjistil, že ve Světozoru zdražili!

V řadě systémů v běžném životě potřebujeme nastavit hodnotu nějaké veličiny. Pokud je ale počáteční hodnota této veličiny jiná, je potřeba ji změnit. Zároveň ale nemůžeme měnit naslepo, zpětnou smyčkou tedy sledujeme, jak se systém vyvíjí, a podle toho upravujeme cestu ke zvolené hodnotě. Například v úloze kontrolujeme teplotu a naší snahou je výkon upravovat tak, abychom troubu zbytečně nerozpálili nebo aby příliš neoscilovala kolem zvolené teploty. V našem případě je výkon úměrný rozdílu mezi nastavenou hodnotou T_s a reálnou hodnotou T. Takové regulaci se říká *proporční*. Jak ale uvidíme při řešení této úlohy, má tento způsob své nedostatky.

Výrazně sofistikovanější je PID regulace. Jednotlivá písmena odpovídají proporčnímu členu, integračnímu a derivačnímu. Do změny veličiny se tedy kromě její vlastní hodnoty promítá také její derivace i integrace přes nějaký předešlý čas. Pomocí takové kontroly je možné dosáhnout požadované hodnoty hladce, přesně a bez oscilací.

Vraťme se ale k řešení naší úlohy. Množství tepla v troubě Q se mění s tím, jak se zahřívá vnějším příkonem P_{in} a jak jej ztrácí tepelnými ztrátami do okolí P_{out}. Podle zadání můžeme obě tyto veličiny vyjádřit jako

$$P_{\mathrm{in}} = K\left(T_{\mathrm{s}} - T\right) , \quad P_{\mathrm{out}} = \kappa\left(T - T_{\mathrm{a}}\right) ,$$

a teplo trouby je $Q = CT$. Můžeme proto napsat bilanci změny tepla v čase t

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P_{\mathrm{in}} - P_{\mathrm{out}} = K\left(T_{\mathrm{s}} - T\right) - \kappa\left(T - T_{\mathrm{a}}\right) = KT_{\mathrm{s}} + \kappa T_{\mathrm{a}} - \left(K + \kappa\right)T .$$

V zadání se ptáme na ustálenou teplotu. V tomto stavu je změna teploty s časem nulová, což odpovídá nulové levé straně rovnice. Pravou stranu tedy můžeme upravit do tvaru

$$T_{\mathrm{f}} = \frac{KT_{\mathrm{s}} + \kappa T_{\mathrm{a}}}{K + \kappa} = T_{\mathrm{s}}\frac{1 + k\frac{T_{\mathrm{a}}}{T_{\mathrm{s}}}}{1 + k} ,$$

kde T_{f} je hledaná teplota a $k = \kappa/K$. Jestliže jsou všechna čísla kladná, vyšlo nám $T_{\mathrm{f}} < T_{\mathrm{s}}$, takže trouba nikdy požadované teploty nedosáhne, což je samozřejmě problém. Jedinou možností je buď minimalizace k, nebo zabudování sofistikovanějšího regulátoru.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha DG ... stlačování stříkačky vzduchu

Lego si hrál se stříkačkou. Natáhl ji na objem $V = 20\,\mathrm{ml}$, poté zacpal otvor a začal ji stlačovat, což dělal velmi pomalu, aby si vzduch uvnitř stíhal přes stěny vyměňovat teplo s okolím. Jakou práci Lego vykonal, když stiskl stříkačku na objem $V/2$? V okolí jsou celou dobu normální podmínky.

Legovi přišlo, že mnoho lidí zapomíná na okolní vzduch.

Vzorec pre prácu izotermického deja je

$$W = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} ,$$

kde V_2 je konečný objem a V_1 je počiatočný objem. Musíme si ale uvedomiť, že toto W je práca vykonaná plynom a nás zaujíma práca, ktorú vykonáme my na plyne a tá bude mať opačné znamienko, čo sa prejaví prevrátením zlomku v logaritme.

Na začiatku mal plyn v striekačke objem V a tlak p_{a}, čiže zo stavovej rovnice môžeme vyjadriť

$$p_{\mathrm{a}}V = nRT ,$$

čo po dosadení do vzťahu pre prácu dáva

$$W = p_{\mathrm{a}}V\ln 2 \doteq 1{,}4\,\mathrm{J} .$$

Snáď je ale intuitívne, že keď stlačím striekačku na polovicu jej pôvodného objemu, tak reálne vykonám menej práce, než keď napríklad zdvihnem 1,5 l fľašu (približne 15 N) o 10 centimetrov (čo je len o trocha viac než 1,4 J). Kde sme teda spravili „chybu“? Zabudli sme započítať to, ako nám pomôže vzduch čo máme okolo seba, keďže ten stláča striekačku spolu s nami a teda nemusíme prekonať celý tlak v striekačke, ale len to o koľko je väčší oproti atmosférickému. Nakoľko atmosférický tlak ostane počas stláčania striekačky konštantný, vieme jednoducho spočítať, koľko práce na stláčaní striekačky bolo vykonanej okolitou atmosférou ako

$$W_\mathrm{A} = p_\mathrm{a}\Delta V = p_\mathrm{a}\frac{V}{2} \doteq 1{,}0\,\mathrm{J}\,.$$

Prácu, ktorú musí vykonať Lego môžeme dopočítať ako rozdiel týchto dvoch

$$W = W_\mathrm{A} + W_\mathrm{L} \quad \Rightarrow \quad W_\mathrm{L} = W - W_\mathrm{A} = p_\mathrm{a}V\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) \doteq 0{,}39\,\mathrm{J}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha DH ... napínavá

Monča vzala jablko a položila jej na okraj kolotoče, který roztočila. Potom se postavila do určité vzdálenosti od něj. Pod úhlem 45° *vůči vodorovnému směru ve stejné výšce, jako je kolotoč, směrem na jeho střed napnula a vystřelila gumičku o hmotnosti* $5{,}0\,\mathrm{g}$ *tak, že jablko sestřelila. Určete nejnižší možnou obvodovou rychlost kolotoče, pokud víte, že gumička má tuhost* $10\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ *a Monče by se podařilo jablko sestřelit, pokud by ji natáhla nejen na* $6{,}0\,\mathrm{cm}$*, ale i na* $5{,}0\,\mathrm{cm}$*.* *Monča si hrála na hřišti.*

Úlohu vyřešíme pomocí zákona zachování energie. Nejdříve si tedy vyjádříme, jakou energii měla gumička po natažení, tedy těsně před tím, než odletěla na kolotoč. Gumičku aproximujeme jako dokonalou pružinu, tudíž její energie bude

$$E = \frac{1}{2}ky^2\,,$$

kde k je tuhost gumičky a y je výchylka, do které jsme ji natáhli. Po puštění gumičky se všechny energie změní na kinetickou, tedy

$$E = E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

odkud si obecnou rychlost gumičky vyjádříme jako

$$v = \sqrt{\frac{ky^2}{m}}\,.$$

Abychom spočítali obvodovou rychlost, budeme potřebovat rozdíl vzdáleností jednotlivých výstřelů a rozdíl časů jejich letu. Rozdíl časů nám řekne, jaká je polovina periody kolotoče, protože jednou je jablko sestřeleno, když je blíže Monči, a jednou, když je na druhé straně kolotoče – gumička tedy v tomto případě musí kolotoč přeletět.

$$v_\mathrm{kol} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\frac{d}{2}}{2\frac{T}{2}} = \frac{\pi d}{2\Delta t} = \frac{\pi(x_1 - x_2)}{2(t_1 - t_2)}\,,$$

kde r je poloměr kolotoče, d jeho průměr, x_1, x_2 jsou vzdálenosti, do kterých gumička doletí, a t_1, t_2 jsou časy letu gumičky.

Nyní si rozebereme samotný pohyb. Jedná se o vrh pod úhlem 45°, což znamená, že horizontální i vertikální složka rychlosti jsou stejně velké. Z pravoúhlého trojúhelníku potom víme, že

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,,$$

dohromady tedy vyjádříme rychlost jako

$$v = \sqrt{2v_x^2} = \sqrt{2}v_x\,.$$

Z rovnic pro vrh nám vychází dvě rovnice, první pro horizontální vzdálenost a druhá pro výšku

$$x = v_x t\,,$$

$$0 = v_x t - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

z první rovnice vyjádříme čas a po dosazení do druhé nám vyjde

$$x = \frac{2v_x^2}{g}\,,$$

pro vyjádření času poté použijeme první ze dvou rovnic

$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{2v_x}{g}\,.$$

Stačí tedy už jen dosadit za rychlost ze zákona zachování energie

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{ky^2}{m}}\,.$$

Nakonec už jen spočítáme rozdíl časů a vzdáleností a vše dosadíme

$$(x_1 - x_2) = \frac{2v_{x1}^2}{g} - \frac{2v_{x2}^2}{g} = \frac{ky_1^2}{mg} - \frac{ky_2^2}{mg} = \frac{k}{mg}\left(y_1^2 - y_2^2\right)\,.$$

Pro čas

$$(t_1 - t_2) = \frac{2v_{x1}}{g} - \frac{2v_{x2}}{g} = \sqrt{\frac{2k}{mg^2}}y_1 - \sqrt{\frac{2k}{mg^2}}y_2 = \sqrt{\frac{2k}{mg^2}}\,(y_1 - y_2)\,.$$

Nyní dosadíme do rovnice pro rychlost

$$v_{\mathrm{kol}} = \frac{\pi(x_1 - x_2)}{2(t_1 - t_2)} = \frac{\pi\frac{k}{mg}\left(y_1^2 - y_2^2\right)}{2\sqrt{\frac{2k}{mg^2}}\,(y_1 - y_2)} = \pi\sqrt{\frac{k}{8m}}\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{(y_1 - y_2)} = \pi\sqrt{\frac{k}{8m}}\,(y_1 + y_2)\,,$$

po dosazení hodnot ze zadání vychází

$$v_{\mathrm{kol}} = \pi\sqrt{\frac{k}{8m}}\,(y_1 + y_2) = \pi\sqrt{\frac{10}{8\cdot 0{,}005}}\,(0{,}06 + 0{,}05) = 5{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Rychlost kolotoče je tedy $5{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@fykos.cz

Úloha EA ... Fingal's Fingers

Strongman zdvihá obrovskou a jistě velmi těžkou tyč. Tato tyč je homogenní s hmotností $m = 250\,\mathrm{kg}$, délkou $l = 4{,}5\,\mathrm{m}$. Jeden svůj konec má uchycený k zemi a může se kolem něj volně otáčet. Strongman ji zvedá tak, že postupuje od opačného konce a vždy drží aktuální bod ve výšce $h = 180\,\mathrm{cm}$ a jde stále blíže k bodu, kde je tyč uchycena. Jaká je minimální síla, kterou musí působit na tyč ve chvíli, kdy je jeho vzdálenost od upevnění tyče $x = 1{,}5\,\mathrm{m}$? Předpokládejte, že strongman stojí svisle. *Lego doomscrolloval...*

Minimálnu potrebnú silu spočítame z rovnováhy momentov síl. Tie budeme počítať vzhľadom na uchytenie tyče (pretože by bolo náročné počítať, aká sila by pôsobila v nej).

Tiažová sila pôsobiaca na tyč má veľkosť $F_\mathrm{g} = mg$ a pôsobí v jej ťažisku, ktoré je uprostred tyče. Nakoľko táto sila pôsobí zvislo nadol, tak jedna možnosť, ako zrátať jej moment sily, je vynásobiť ju vodorovnou vzdialenosťou medzi bodom uchytenia a stredom tyče. Uhol, ktorý zviera tyč a zem, môžeme spočítať zo strongmanovej výšky a vzdialenosti ako

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{h}{x} \,.$$

Vodorovná vzdialenosť stredu tyče od osi otáčania potom bude $x_{l/2} = (l/2)\cos\varphi$ a z toho výsledný moment tiažovej sily

$$M_\mathrm{g} = F_\mathrm{g} x_{l/2} = mg\frac{l}{2}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{h}{x}\right) \,.$$

Nech strongman tlačí silou F (to je naša neznáma). Aké je potom rameno sily? Nakoľko strongman nie je obmedzený tým, že by musel tlačiť jedine kolmo nahor, a nás zaujíma minimálna potrebná sila, tak nás v skutočnosti zaujíma situácia, keď tlačí kolmo na rameno sily. Dĺžku tohto ramena si môžeme jednoducho spočítať z Pytagorovej vety ako $r = \sqrt{x^2 + h^2}$. Jeho moment sily tak bude

$$M_\mathrm{s} = F\sqrt{x^2 + h^2} \,.$$

Zostáva nám ešte vyriešiť v člene M_g ten $\cos\left(\operatorname{arctg}(h/x)\right)$. Buďto môžeme použiť nejaké vlastnosti goniometrických funkcií, alebo si môžeme všimnúť, že ten trojuholník s preponou $l/2$, ktorého priľahlú odvesnu sme chceli spočítať, je podobný trojuholníku, ktorý sme práve použili (a síce tomu s preponou $\sqrt{x^2 + h^2}$ a priľahlou odvesnou x). Čiže namiesto goniometrie sme rovno mohli písať

$$x_{l/2} = \frac{l}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \,.$$

Dáme veľkosti oboch momentov sily do rovnosti

$$M_\mathrm{g} = M_\mathrm{s} \,,$$

$$mg\frac{l}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = F\sqrt{x^2 + h^2} \,,$$

$$F = \frac{1}{2}mg\frac{lx}{x^2 + h^2} \doteq 1{,}5\,\mathrm{kN} \,.$$

Z rovnice môžeme vidieť, že keď bude strongman skoro na konci, bude musieť pôsobiť už len veľmi malou silou. Zato, kým bude $x \gg h$, tak bude potrebná sila úmerná $1/x$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha EB ... Lego si půjčil Verčinu minci

Lego si od Verči půjčil její minci z minulého roku a rozhodl se, že prozkoumá její vlastnosti. Pustil si pohyblivý pás, který nabyl rychlosti v. Potom vzal minci a položil ji na něj tak, aby se mohla kutálet ve směru jeho pohybu a aby se v moment vypuštění nehýbala ani nerotovala. Koeficient smykového tření mezi mincí a pásem je f. Po jak dlouhé době mince přestane prokluzovat? Mince je homogenní disk s poloměrem r a hmotností m.

... a kdyby to Lego udělal dřív, mohl by poradit Vojtovi s petanquem...

Čo sa stane, keď mincu položíme na pás? Bude prešmykovať a tým pádom ju bude trecia sila roztáčať a zrýchľovať. Toto prešmykovanie sa zastaví, keď rýchlosť bodu na spodku mince dosiahne rýchlosť pásu v. Rýchlosť spodného bodu je pritom rovná súčtu rýchlosti pohybu stredu mince a obvodovej rýchlosti rotácie mince. Poďme si teda vyjadriť časový vývoj oboch týchto rýchlostí.

Začneme zrýchlením stredu mince. Táto časť je jednoduchá: výsledná sila pôsobiaca na mincu je rovná trecej sile, ktorá sa rovná súčinu koeficientu trenia a normálovej sily, ktorá je v tomto prípade rovná tiažovej. Čiže $F_\mathrm{t} = fmg$. Zrýchlenie dostaneme podelením hmotnosťou mince, čiže $a = F_\mathrm{t}/m = fg$. Tým pádom je translačná rýchlosť mince $v_\mathrm{t}(t) = fgt$.

Na zistenie rotačnej rýchlosti potrebujeme zistiť najprv uhlové zrýchlenie, ktoré dostaneme ako podiel momentu sily a momentu zotrvačnosti. Už vieme, že trecia sila, čo pôsobí na mincu, má veľkosť $F_\mathrm{t} = fmg$. Nakoľko má minca polomer r, bude moment tejto sily vzhľadom na stred mince $M_\mathrm{t} = F_\mathrm{t} r = fmgr$. Moment zotrvačnosti homogénneho disku s hmotnosťou m a polomerom r je $I = mr^2/2$. Tým pádom bude uhlové zrýchlenie mince

$$\varepsilon = \frac{M_\mathrm{t}}{I} = \frac{fmgr}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{2fg}{r}\,.$$

Uhlová rýchlosť rotácie mince sa v čase bude meniť ako $\omega(t) = \varepsilon t = 2fgt/r$ a obvodová rýchlosť teda bude $v_\mathrm{r}(t) = \omega(t) r = 2fgt$.

Zostáva si predstaviť, ktorým smerom bude pás mincu rozhýbavať a roztáčať. Na spodku mince má translačná a rotačná zložka rýchlosti rovnaký smer, a teda výsledná veľkosť rýchlosti bodu na spodku mince bude súčtom veľkostí týchto dvoch rýchlostí $v_\mathrm{v}(t) = v_\mathrm{t}(t) + v_\mathrm{r}(t) = 3fgt$.

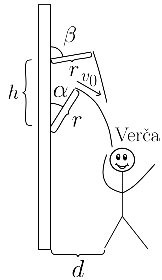
Máme prísť na to, kedy prestane prešmykovanie. Ako sme už povedali v úvode, nastane to práve vtedy, keď sa v_v spodného bodu mince vyrovná v pásu, čiže dostávame jednoduchú lineárnu rovnicu

$$3fgt = v \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v}{3fg}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha EC ... sprchová

Verča se sprchuje pod proudem vody vycházejícím z hlavice upevněné na stojanu ve sprchovém koutě. Hlavice má délku $r = 25\,\mathrm{cm}$, je nakloněná pod úhlem $\alpha = 45^\circ$ vůči vertikální ose stojanu a voda z ní vystřikuje kolmo rychlostí $v_0 = 5{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Proud vody dopadá na Verču ve vodorovné vzdálenosti $d = 50\,\mathrm{cm}$ od stojanu. Ona však preferuje, aby na ni voda dopadala z větší výšky, posune proto hlavici o h výš. Pak přenastaví úhel mezi hlavicí a stojanem na velikost $\beta = 60^\circ$ tak, aby na ni voda opět dopadala ve vzdálenosti d. O jakou výšku h Verča hlavici posunula na stojanu nahoru? Tloušťku proudu vody zanedbejte a uvažujte, že hlavice, stojan a místo dopadu vody na Verču jsou v jedné rovině. *Nápady přicházejí ve sprše.*



Voda začína striekať zo vzdialenosti $d_0 = r \sin\alpha$ od osy stojanu. Priemet jej rýchlosti do vodorovného smeru bude $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$. Z toho môžeme vypočítať čas, ktorý potrvá vode cesta z hlavice na Verču

$$t_1 = \frac{d - d_0}{v_{0x}} = \frac{d - r\sin\alpha}{v_0 \cos\alpha}\,.$$

Z toho môžeme spočítať výškový rozdiel h_1 medzi bodmi, kde voda opustí hlavicu a kde dopadne na Verču

$$h_1 = v_{0y} t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 = v_0 \sin\alpha \frac{d - r\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} + \frac{1}{2} g \left(\frac{d - r\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}\right)^2 \doteq 36\,\mathrm{cm}\,,$$

kde g je tiažové zrýchlenie.

Následne môžeme tento postup zopakovať aj s uhlom β, z čoho dostaneme pre tento prípad výškový rozdiel h_2. Musíme ale myslieť na to, že rozdiel medzi výškami h_1 a h_2 je spôsobený dvomi faktormi: tým, ako Verča posunula celú hlavicu nahor a tým, ako ju sklopila na iný uhol. Takže ak chceme spočítať, o koľko hlavicu posunula, musíme odčítať rozdiel spôsobený zmenou uhla. Rozdiel vo výškach medzi bodom uchytenia hlavice a jej koncom je $r\cos\alpha$ (bod uchytenia je o túto hodnotu nižšie), takže $h_1 - r\cos\alpha$ je o h menej než $h_2 - r\cos\beta$. Dostávame preto rovnicu

$$\sin\alpha \frac{d - r\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{1}{2} g \left(\frac{d - r\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}\right)^2 - r\cos\alpha + h =$$

$$= \sin\beta \frac{d - r\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{1}{2} g \left(\frac{d - r\sin\beta}{v_0\cos\beta}\right)^2 - r\cos\beta$$

$$h = \frac{1}{2} g \left(\left(\frac{d - r\sin\beta}{v_0\cos\beta}\right)^2 - \left(\frac{d - r\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}\right)^2\right) +$$

$$+ \sin\beta \frac{d - r\sin\beta}{\cos\beta} - \sin\alpha \frac{d - r\sin\alpha}{\cos\alpha} - r(\cos\beta - \cos\alpha) \doteq 24\,\mathrm{cm}\,.$$

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha ED ... cesta do nestředu Země

Jaký je úhel sevřený mezi spojnicí středu Země s bodem na $\varphi = 50{,}1^\circ$ rovnoběžce na zemském povrchu a směrem tíhového zrychlení v tomto bodě?

Lega opravdu napadají takovéhle otázky.

Tiažová sila pôsobiaca na hmotný bod na zemskom povrchu je súčtom gravitačnej sily, ktorá ťahá tento hmotný bod smerom ku stredu Zeme, a odstredivej sily, ktorá naň (zdanlivo) pôsobí, lebo rotuje spolu so zemským povrchom. Táto sila pôsobí v smere kolmom na zemskú os (a leží v rovine danej zemskou osou a týmto hmotným bodom). Tiažové zrýchlenie je potom súčtom gravitačného zrýchlenia a odstredivého zrýchlenia, pričom obe dostaneme tak, že silu pôsobiacu na hmotný bod vydelíme jeho hmotnosťou m. Spočítajme si najprv veľkosti týchto zrýchlení.

Zem má hmotnosť M a polomer R, potom gravitačné zrýchlenie bude mať veľkosť

$$a_G = G\frac{M}{R^2} \doteq 9{,}80\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

kde G je Newtonova gravitačná konštanta.

Pre uhol φ od rovníka bude polomer rotácie $r = R\cos\varphi$. Ďalej vieme, že Zem sa otočí raz za $T = 24\,\mathrm{h}$, takže jej uhlová frekvencia rotácie je $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Veľkosť odstredivého zrýchlenia je potom

$$a_{\mathrm{od}} = \omega^2 r \doteq 0{,}0216\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Zostáva trigonometria. Obe zrýchlenia ležia v rovine danej zemskou osou a bodom, v ktorom pôsobia. Odstredivé zrýchlenie je kolmé na zemskú os a smeruje preč od nej. Gravitačné zrýchlenie má zložku v smere kolmom na zemskú os s veľkosťou $a_G\cos\varphi$ smerujúcu k zemskej osi a zložku v smere rovnobežnom so zemskou osou $a_G\sin\varphi$ smerom ku stredu Zeme. Výsledné (t.j. tiažové) zrýchlenie bude mať zložku rovnobežnú so zemskou osou rovnakú ako gravitačné zrýchlenie a zložku kolmú k zemskej osi veľkosti $a_G\cos\varphi - a_{\mathrm{od}}$. Potom uhol, ktorý tiažové zrýchlenie zviera s kolmicou k zemskej osi, bude

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a_G\sin\varphi}{a_G\cos\varphi - a_{\mathrm{od}}} = 50{,}2^\circ\,.$$

Nakoľko uhly, ktorými sú označované rovnobežky, sú tiež merané od kolmice k zemskej osi (rovník je 0 a póly sú 90), na určenie uhlu medzi spojnicou bodu so stredom zeme a tiažovým zrýchlením potrebujeme zobrať ich rozdiel. Čiže v našom prípade $|\alpha - \varphi| \approx 0{,}1^\circ$.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha EE ... vodivý vzduch

Deskový kondenzátor o ploše desek A a jejich vzájemné vzdálenosti d nabijeme na napětí U. Určete, za jak dlouho toto napětí klesne na třetinu, pokud je mezi deskami vzduch o měrné elektrické vodivosti σ. *Jardovi se vybily baterky.*

Kapacitu tohoto kondenzátoru určíme standardně jako

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}\,,$$

kde ε představuje permitivitu vzduchu a význam A resp. d poznáme ze zadání. Napětí U s nábojem na deskách Q spojíme vztahem $Q = CU$.

Uvažujme, že vzduch mezi deskami tvoří rezistor s velkým odporem, konkrétně

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{A}\,.$$

Parazitní proud mezi deskami pak určíme jako

$$I = \frac{U}{R}\,,$$

a náboj na deskách se snižuje jako

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = I = \frac{U}{R}\,.$$

Toto je diferenciální rovnice, kterou vyřešíme separací proměnných

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\,.$$

Nyní potřebujeme dosadit za výše nalezené hodnoty odporu a kapacity

$$CR = \frac{\varepsilon A}{d}\frac{1}{\sigma}\frac{d}{A} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\,,$$

takže časový vývoj napětí na kondenzátoru je

$$U = U_0 \exp\left(-\frac{\sigma t}{\varepsilon}\right)\,.$$

Řešení naší úlohy pak je

$$T = \frac{\varepsilon}{\sigma}\ln(3)\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha EF ... můj bratr Coriolis

Pepa si chtěl prakticky připomenout gravitaci, a tak si vymyslel (myšlenkový) experiment: O jakou vzdálenost od paty kolmice se odchýlí učebnice při volném pádu z Ústavu teoretické fyziky MFF UK působením Coriolisovy síly? Uvažujte, že Ústav je ve výšce $h = 60\,\mathrm{m}$, odpor vzduchu je zanedbatelný a zeměpisná šířka Prahy je $\varphi = 50^\circ$ N. Vztah pro Coriolisovo zrychlení je $\vec{a}_\mathrm{C} = -2\,\vec{\omega}\times\vec{v}$. *Pepa dělal zkoušku z obecné teorie relativity.*

Pri riešení budeme zanedbávať efekty vyšších rádov. Budeme teda uvažovať bežný voľný pád (rovnomerne zrýchlený pohyb), kde navyše na teleso pôsobí Coriolisova sila. Tú budeme po celý čas uvažovať vo vodorovnom smere, pretože podľa vzťahu zo zadania je vždy kolmá na rýchlosť pádu $\vec{v}$ a tá sa výrazne neodchýli od zvislého smeru.

V našom prípade bude Coriolisova sila spôsobená rotáciou Zeme okolo svojej osi, takže naša veľkosť uhlovej rýchlosti bude $\omega = 1\,\mathrm{ot{\cdot}de\check{n}^{-1}} \doteq 7{,}27\cdot 10^{-5}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ a jej smer bude zhodný so smerom zemskej rotačnej osi. Z toho plynie, že uhol medzi vektormi $\vec{\omega}$ a $-\vec{v}$ bude $90^\circ - \varphi$, teda

$$a_\mathrm{C} = -2\,|\vec{\omega} \times \vec{v}| = 2\,|\vec{\omega}|\,|\vec{v}| \sin(90^\circ - \varphi) = 2\omega v \cos(\varphi)\,.$$

Preintegrovaním tohto zrýchlenia cez čas potom dostaneme hodnotu vodorovnej zložky rýchlosti $v_\mathrm{v}(t)$ telesa v čase t. Použijeme pritom aproximáciu, že táto vodorovná zložka bude počas celého pádu výrazne menšia ako zvislá zložka rýchlosti v_z, takže $|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_\mathrm{z}^2(t) + v_\mathrm{v}^2(t)} \approx \approx v_\mathrm{z}(t) = gt$.

$$v_\mathrm{v}(t) = \int_0^t a_\mathrm{C}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^t 2\omega g t \cos(\varphi)\ \mathrm{d}t = \omega g t^2 \cos(\varphi)\,,$$

pričom počiatočnú hodnotu vodorovnej rýchlosti $v_\mathrm{v}(0)$ sme (rovnako ako $v_\mathrm{z}(0)$) položili rovnú nule. Ďalším preintegrovaním cez čas dostaneme dráhu, ktorú teleso prejde vo vodorovnom smere, teda presne hľadané odchýlenie od priamej zvislej trajektórie

$$s_\mathrm{v}(t) = \int_0^t v_\mathrm{v}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^t \omega g t^2 \cos(\varphi)\ \mathrm{d}t = \omega g \frac{t^3}{3} \cos(\varphi)\,.$$

Teraz už stačí len dosadiť čas, za ktorý teleso prejde voľným pádom (iba vo zvislom smere) výšku h, teda

$$h = g\frac{t_1^2}{2} \implies t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

Takže hľadaným odchýlením je

$$s_\mathrm{v}(t_0) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\omega\cos(\varphi) \doteq 6{,}5\,\mathrm{mm}\,.$$

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha EG ... interstelární čokoláda

Nejmenovaná čokoládovna se kvůli snížení nákladů rozhodla distribuovat čokoládu na vzdálené planety. Spočítejte, na jakou nejdelší vzdálenost můžou poslat zásilku 10 stogramových tabulek, jejichž expirační doba vyprší přesně za $t_\mathrm{cok} = 1{,}0\,\mathrm{y}$ *a o kterých společnost může mimozemšťanům tvrdit, že jejich* $m_\mathrm{dod} = 5{,}0\,\mathrm{kg}$ *čokolády je už na cestě. Uvažujte, že rychlost blížící se rychlosti světla nijak neovlivní vlastnosti čokolády (chuť, vůni, datum expirace, atd.) a že doba, po kterou bude čokoláda zrychlovat, je zanedbatelná vůči času celého letu.*

... nebývaly ty čokolády větší?

Pro výpočet největší možné vzdálenosti musíme spočítat rychlost, jakou musí dodávka letět, a čas, jaký čokoláda poletí, aby nevypršela její expirační doba.

Nejprve spočítáme rychlost, při které bude splněna podmínka na hmotnost dodávky čokolády. Tuto rychlost jednoduše vyjádříme ze vzorce pro relativistickou hmotnost

$$m_\mathrm{dod} = \frac{m_\mathrm{cok}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Rychlost tedy bude

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{\mathrm{cok}}}{m_{\mathrm{dod}}}\right)^2}\,.$$

Nyní spočítáme čas. Uvažujme, že když se čokoláda pohybuje téměř rychlostí světla, nebude to mít žádný dopad na její vlastnosti, tedy její expirační doba zůstane stejná. Víme však také, že při této rychlosti se čas v soustavě čokolády změní, tedy musíme přepočítat i maximální dobu, kterou čokoláda může letět, aby to byl v její soustavě právě 1 rok. Použijeme tedy vzorec pro diletaci času

$$t_{\mathrm{cok}} = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,,$$

$$t = \frac{t_{\mathrm{cok}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Do vyjádřeného času ještě dosadíme vypočítanou rychlost a dostaneme

$$t = \frac{t_{\mathrm{cok}}}{\sqrt{1 - \frac{c^2\left(1 - \left(\frac{m_{\mathrm{cok}}}{m_{\mathrm{dod}}}\right)^2\right)}{c^2}}} = \frac{t_{\mathrm{cok}} m_{\mathrm{dod}}}{m_{\mathrm{cok}}}\,.$$

Nyní už stačí jen oba vypočítané maximální údaje dosadit do vzorce pro vzdálenost

$$x = tv = \frac{t_{\mathrm{cok}} m_{\mathrm{dod}}}{m_{\mathrm{cok}}} c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{\mathrm{cok}}}{m_{\mathrm{dod}}}\right)^2} = t_{\mathrm{cok}} c\sqrt{\left(\frac{m_{\mathrm{dod}}}{m_{\mathrm{cok}}}\right)^2 - 1}\,.$$

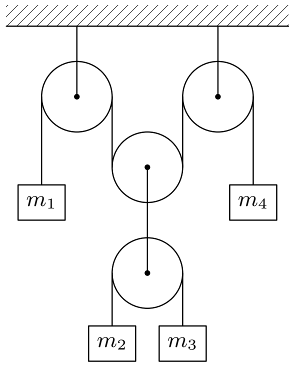
Nakonec jen dosadíme číselné hodnoty ze zadání. Můžeme si povšimnout, že součin $t_{\mathrm{cok}} \cdot c$ nám dává světelný rok, tedy stačí vyčíslit výraz v odmocnině

$$x = \left(1\sqrt{\left(\frac{5{,}0\,\mathrm{kg}}{1{,}0\,\mathrm{kg}}\right)^2 - 1}\right)\ \mathrm{ly} = \left(1 \cdot \sqrt{24}\right)\ \mathrm{ly} \doteq 4{,}9\,\mathrm{ly}\,.$$

Největší vzdálenost, na jakou můžeme tuto dodávku čokolády poslat, je 4,9 světelných let.

Monika Drexlerová
monika.drexlerova@fykos.cz

Úloha EH ... 4 kladky a 4 závaží



Mějme kladky a závaží uspořádané podle obrázku. Závaží mají hmotnosti $m_1 = 1{,}1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 2{,}2\,\mathrm{kg}$, $m_3 = 3{,}3\,\mathrm{kg}$ a $m_4 = 4{,}4\,\mathrm{kg}$. Všechna lana i kladky jsou nehmotné a dokonale nepružné. S jakým zrychlením bude zrychlovat závaží s hmotností m_1? Uveďte kladné znaménko, bude-li zrychlovat směrem dolů, a záporné, pokud nahoru.

Lego chtěl nějakou relativně typickou úlohu na kladky.

To, že laná aj kladky sú nehmotné, znamená, že výsledné sily aj momenty síl, čo na ne pôsobia, musia byť nulové (lebo $F = ma = 0a = 0$). V nasledujúcom odseku tento fakt opakovane použijeme.

Pre obe laná, na ktorých visia kvádre, platí, že po celej ich dĺžke je napätie rovnaké. Označme si pnutia v lanách ako T_1 a T_2. Horná voľná kladka je ťahaná nahor silou $2T_1$, takže lano, ktoré z nej visí, ju musí ťahať nadol rovnako veľkou silou. Toto lano je tiež nehmotné, a teda ťahá dolnú voľnú kladku silou $2T_1$ nahor. Táto kladka je ťahaná nadol druhým lanom silou $2T_2$. Musí teda platiť $2T_1 = 2T_2$, z čoho je zjavné, že napätia v oboch lanách sú rovnaké. Označme $T_1 = T_2 = T$.

Definujme zrýchlenie každého kvádra ako kladné, ak smeruje nadol, a záporné, ak smeruje nahor. Potom môžeme napísať pohybové rovnice (2. Newtonov zákon) pre všetky kvádre ako

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T\,, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T\,, \\ m_3 a_3 &= m_3 g - T\,, \\ m_4 a_4 &= m_4 g - T\,. \end{aligned}$$

Ešte je potrebné použiť fakt, že laná nemenia svoju dĺžku a kladky nemenia tvar. Predstavme si, že závažia trocha poposúvame. Čo sa stane? Horná voľná kladka sa pohne nahor o priemer posunutia závaží m_1 a m_2 nadol. Dolná kladka sa musí pohnúť nahor o rovnakú dráhu, teda o priemer posunutia závaží m_1 a m_2, čím sa nahor musí o rovnakú vzdialenosť posunúť aj ťažisko závaží m_3 a m_4. Z toho dostaneme podmienku pre posunutia závaží. Označme si posunutie závažia ako kladné, ak je v smere nadol, a ako záporné, ak je v smere nahor. Potom môžeme túto podmienku symbolicky vyjadriť následovne

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2} &= -\frac{\Delta x_3 + \Delta x_4}{2}\,, \\ \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

Keď túto rovnosť dvakrát zderivujeme podľa času, dostaneme podmienku pre zrýchlenia

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\,.$$

Máme teda 5 rovníc (4 pohybové a 1 podmienku na zrýchlenia) a 5 neznámych (4 zrýchlenia a 1 napätie v lane). Poďme ich vyriešiť. Do podmienky na zrýchlenia dosadíme z pohybových rovníc všetky zrýchlenia okrem a_1 (lebo to nás zaujíma)

$$a_1 + 3g - T\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}\right) = 0\,.$$

Teraz už len dosadíme za T z prvej pohybovej rovnice

$$a_1 + 3g + m_1(a_1 - g)\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}\right) = 0\,.$$

Podelíme všetko m_1, dáme členy s a_1 na jednu stranu a členy s g na druhú. Potom už len podelíme faktorom pri a_1 a dostávame výsledok

$$a_1 = \frac{-\frac{3}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}} g \doteq -9{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha FA ... Tři soutěsky

Jak se změnila délka dne poté, co byla v Číně naplněna přehrada Tři soutěsky? Maximální objem přehrady je $39{,}3\,\mathrm{km}^3$, průměrná výška $160\,\mathrm{m}$ n. m. a poloha 30° severní šířky a 111° východní délky. Předpokládejte, že voda byla původně rozmístěna po povrchu celé planety.

A přeci jen lidé mohou pohnout Zemí!

Uvažujme model, kdy se voda z povrchu oceánu přenese do jednoho bodu, aby vyplnila daný objem přehrady. Takto se změní rozložení hmoty na celé planetě, její moment setrvačnosti a podle zákona zachování momentu hybnosti pak i rychlost rotace, tedy délka dne. Nadmořská výška je zanedbatelná oproti poloměru Země, proto uvažujeme, že Tři soutěsky jsou v jednom bodě na povrchu Země.

Původně byl moment setrvačnosti dán jako

$$J_\mathrm{i} = \frac{2}{5} M_\oplus R_\oplus^2\,.$$

Objem přenesené vody byl $V = 4\pi R_\oplus^2 d$, kde $d \doteq 0{,}08\,\mathrm{mm}$ je tloušťka vody na hladině, která byla odebrána. Moment setrvačnosti Země, když neuvažujeme tuto povrchovou vrstvu, je

$$J_- = J_\mathrm{i} - \frac{2}{3} V \rho R_\oplus^2\,,$$

kde ρ je hustota vody a v rovnici uvažujeme zanedbání díky $d \ll R_\oplus$. Naopak se ale tato voda koncentrovala do jednoho bodu, který je ve vzdálenosti $R_\oplus \cos\varphi$ od zemské osy rotace, kde $\varphi \doteq 30^\circ$ je zeměpisná šířka polohy této přehrady. Nový moment setrvačnosti Země je proto

$$J_\mathrm{f} = J_\mathrm{i} - \frac{2}{3} V \rho R_\oplus^2 + V \rho R_\oplus^2 \cos^2\varphi\,.$$

Nyní rozepišme zákon zachování hybnosti z tvaru

$$J_\mathrm{i}\omega_\mathrm{i} = J_\mathrm{f}\omega_\mathrm{f}\,,$$

kde

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

je úhlová rychlost rotace a T je její perioda. Dostáváme

$$\frac{J_\mathrm{i}}{T_\mathrm{i}} = \frac{J_\mathrm{f}}{T_\mathrm{f}} \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{f} = T_\mathrm{i} \frac{J_\mathrm{i} - \frac{2}{3} V \rho R_\oplus^2 + V \rho R_\oplus^2 \cos^2 \varphi}{J_\mathrm{i}} = T_\mathrm{i} \left(1 - \frac{5 V \rho}{2 M_\oplus} \left(\frac{2}{3} - \cos^2 \varphi \right) \right) .$$

Změna délky dne je proto

$$\Delta T = T_\mathrm{f} - T_\mathrm{i} = T_\mathrm{i} \frac{5 V \rho}{2 M_\oplus} \left(\cos^2 \varphi - \frac{2}{3} \right) \doteq 0{,}12\,\mathrm{\mu s} .$$

Den se prodloužil o $0{,}12\,\mathrm{\mu s}$.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FB ... TEM

V transmisním elektronovém mikroskopu (TEM) je možné pozorovat i difrakci elektronů na periodické mřížce atomů v krystalech. Uvažujte, že elektrony urychlené napětím $90{,}0\,\mathrm{kV}$ *dopadají kolmo na čtvercovou mřížku zlatých atomů o mřížkové konstantě* $407{,}856\,\mathrm{pm}$. *O kolik stupňů se vychýlí elektrony v maximu prvního řádu?*

Jarda chtěl spojit všechny oblasti fyziky do jedné úlohy.

K řešení této úlohy musíme využít znalosti z oblasti kvantové fyziky, relativity a vlnové optiky. Elektrony dopadající na mřížku atomů mají vlnové vlastnosti určené jejich vlnovou délkou. Ta je dána jejich hybností, kterou ale musíme spočítat s použitím speciální teorie relativity – klasická fyzika by nevedla ke správnému výsledku. Nakonec s použitím znalosti jejich vlnové délky spočítáme jejich odchylku od původního směru.

Začneme od konce – pro difrakci vlny na mřížce platí vztah

$$d \sin \alpha = k \lambda ,$$

kde d je vzdálenost atomů v mřížce, α hledaný úhel od kolmice k povrchu, $k = 1$ je řád maxima, který je podle zadání roven jedné, a λ je vlnová délka dopadajících elektronů. Vztah se dá odvodit z jednoduché úvahy. Rozptyl elektronů je nejsilnější v těch směrech, ve kterých nastává konstruktivní interference. Dráhový rozdíl v uražené vzdálenosti elektronů tedy musí být roven celočíselnému násobku vlnové délky λ. To nám dává pravou stranu rovnice předešlého vztahu, levá strana zase plyne z geometrického nákresu onoho dráhového rozdílu.

Vidíme tedy, že potřebujeme znát vlnovou délku elektronů. Ta je podle de Broglieho teorie dána jako

$$\lambda = \frac{h}{p} ,$$

kde h je Planckova konstanta a p hybnost dané částice. Je zřejmé, že pro makroskopické předměty je jejich vlnová délka zanedbatelná, zatímco pro mikroskopické částice je srovnatelná např. s meziatomovou vzdáleností a může docházet k interferenčním jevům, jako je difrakce. Naším dalším úkolem je tedy spočítat hybnost.

V klasické fyzice můžeme hybnost určit jednoduše z kinetické energie. Elektrony získaly urychlením při napětí $U = 90{,}0\,\mathrm{kV}$ kinetickou energii $E_\mathrm{k} = Ue = 90{,}0\,\mathrm{keV}$. Tato hodnota je ale už řádově srovnatelná s jejich klidovou hmotností $E_0 \doteq 511\,\mathrm{keV}$, což je podmínka pro nutnost použití speciální teorie relativity. Hybnost zde můžeme spočítat z klidové energie a celkové energie částice podle vztahu

$$E^2 = (E_0 + Ue)^2 = E_0^2 + p^2c^2 \,,$$

kde $E = E_0 + Ue$ je celková energie částice. Hybnost na základě znalosti energie tedy dopočítáme jako

$$p = \frac{1}{c^2}\sqrt{(E_0 + Ue)^2 - E_0^2} = \frac{1}{c}\sqrt{2E_0Ue + U^2e^2}$$

Nyní již máme vše, co potřebujeme pro výpočet odchylky od původního směru. Začneme tedy dosazovat do prvního vztahu

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{pd} = \frac{hc}{d\sqrt{2E_0Ue + U^2e^2}} \,,$$

odkud

$$\alpha \doteq 0{,}551^\circ \doteq 9{,}61\,\mathrm{mrad}\,.$$

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha FC ... další závody hmotných bodů

Lego se připravuje na soutěž teoretických fyziků, kteří proti sobě soutěží v závodech hmotných bodů. Hmotné body krouží po trati, která vede kolem tyče délky L ležící na zemi. Lego vyrobil svůj hmotný bod tak, že dokáže vyvinout nejvyšší zrychlení a a jeho rychlost vzhledem k trati má vždy stejnou velikost. Poraďte Legovi, jak má zvolit velikost této rychlosti, aby jeho hmotný bod obkroužil tyč za co nejkratší čas.

Lego je pořád příliš nešikovný na to, aby závodil s něčím skutečným.

Môžeme predpokladať, že trať sa skladá z dvoch identických roviniek a dvoch identických zákrut. Preto nám stačí sledovať súčet času pre jednu rovinku a jednu zákrutu.

Pre veľkosť rýchlosti v sa bude musieť hmotný bod otáčať po kružnici (s polomerom R), pre ktorú platí

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{v^2}{a}\,.$$

Polkruhová zákruta bude mať pre Legov hmotný bod dĺžku $o/2 = \pi R$, čiže ju prejde za čas

$$t_1 = \frac{o/2}{v} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi v}{a}\,.$$

Ak si Legov bod načasuje zákrutu správne, tak nielenže prejde bodom kde palica končí, ale navyše ním prejde tak, že bude práve smerovať kolmo na palicu. Potom časť okruhu, ktorú pôjde rovno, bude mať dĺžku $L - 2R$, pretože na jednej aj na druhej strane je polkružnica s polomerom R (tu mlčky predpokladáme, že $L > 2R$, pričom sa neskôr vrátime k tomu, že to tak byť nemusí). Potom čas, ktorý Legovmu bodu bude trvať jedna rovinka, bude

$$t_2 = \frac{L - 2R}{v} = \frac{L - 2\frac{v^2}{a}}{v} = \frac{L}{v} - \frac{2v}{a}\,.$$

Chceme minimalizovať čas

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\pi v}{a} + \frac{L}{v} - \frac{2v}{a} = \frac{L}{v} + (\pi - 2)\frac{v}{a}\,,$$

kde parameter, cez ktorý minimalizujeme je v. Čiže zderivujeme T podľa v a položíme výsledok rovný 0:

$$0 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}v} = -\frac{L}{v^2} + \frac{\pi - 2}{a}\,,$$

$$\sqrt{\frac{La}{\pi - 2}} = v\,,$$

čím sme dostali optimálnu rýchlosť.

Poďme si to ale ešte overiť, nakoľko pretože sme uprostred riešenia spravili predpoklad, že $L > 2R$. Tento predpoklad hovorí, že tá „rovinka“ má nezápornú dĺžku, čiže ak by táto „optimálna rýchlosť“ nespĺňala daný predpoklad, bolo by to len dôsledkom nesprávneho použitia matiky. Po uvážení dostávame

$$R_{\mathrm{opt}} = \frac{v_{\mathrm{opt}}^2}{a} = \frac{L}{\pi - 2} > \frac{L}{2}\,.$$

Počkať, ono to tentokrát naozaj bolo treba overovať (áno, samého ma to najprv prekvapilo).

Hraničná rýchlosť, pre ktorú bude $2R = L$ je

$$L = 2R = 2\frac{v^2}{a} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{La}{2}}\,,$$

čo sedí s tým, že pre túto rýchlosť má „rovinka“ nulovú dĺžku. Nami použitý postup na výpočet času tak bude fungovať len pre rýchlosti $v < v_0$.

Pre rýchlosti $v > v_0$ bude bod krúžiť jednoducho po kružnici danej polomerom, ktorý sme spočítali. Nakoľko je priemer tejto kružnice väčší alebo rovný ako L, palica sa do nej zmestí, čiže bod môže takto skutočne krúžiť okolo palice. V tomto prípade bude čas (polovice) obkrúženia proste $T = t_1$. Derivovaním tohto času dostaneme

$$0 = \frac{\mathrm{d}t_1}{\mathrm{d}v} = \frac{\pi}{a}\,,$$

čo nemá riešenie. To znamená, že čas pre $v > v_0$ má globálne minimum niekde na hranici intervalu, na ktorom ho hľadáme. Nakoľko je jeho derivácia kladná, bude to na spodnej hranici tohto intervalu, čiže pre $v = v_0$. Obdobne, $T = t_1 + t_2$ má pre všetky $v < v_0$ deriváciu zápornú. Čiže minimum dosiahneme pre

$$v = v_0 = \sqrt{\frac{La}{2}}\,,$$

čo skrátka zodpovedá situácii, keď bod krúži po takej kružnici, že palica je jej priemerom.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha FD ... kmitající plovoucí deska

Lego na vodní hladině uviděl plavat desku s tloušťkou $c = 1{,}0\,\mathrm{cm}$, délkou $a = 100\,\mathrm{cm}$, šířkou $b = 10\,\mathrm{cm}$ a hustotou $\rho_\mathrm{d} = \rho_\mathrm{v}/2$, kde ρ_v je hustota vody. Řekl si tedy, že ji využije (jak jinak) na malé kmity. Tentokrát ji však nestlačil jen jednoduše dolů, ale namísto toho ji rozkmital tak, že ji trochu pootočil kolem její nejdelší osy (ta má délku a). Jaká bude perioda těchto malých kmitů? *Lego upravoval vlastní úlohu, takže si nikdo nebude stěžovat, že krade.*

Označme si uhol, o ktorý Lego dosku pootočil, ako $\mathrm{d}\varphi$. Pokiaľ bude tento uhol dostatočne malý, môžeme zanedbať to, ako sa v dôsledku tohto pootočenia presúvajú časti dosky, ktoré už sú celý čas pod hladinou, a riešiť iba časti dosky, ktoré sa týmto dostanú nad hladinu, alebo naopak pod hladinu.

Zaujíma nás moment sily pôsobiaci proti tomuto pootočeniu. Ten bude spôsobený tým, že na strane, ktorá šla pootočením nadol, bude teraz ponorená väčšia časť dosky než predtým (a teda tam teraz bude pôsobiť väčší vztlak nahor) a obdobne na opačnej strane sa doska z časti vynorí, čiže tam zas bude pôsobiť nižšia vztlaková sila. Nakoľko doska bola predtým v rovnováhe (a jej tiaž sa týmto nezmení), to o koľko sa zmení vztlaková sila v nejakom mieste je rovné výslednej sile v tom mieste. A ako sme spomínali, zaujíma nás výsledný moment sily, čiže pre každú vzdialenosť od osi spočítame silu, prenásobíme vzdialenosťou a toto preintegrujeme cez všetky vzdialenosti.

Budeme teda integrovať cez obdĺžniky v danej vzdialenosti x od osi, jedna strana takého obdĺžnika bude a a druhá $\mathrm{d}x$. Pre malé uhly $\mathrm{d}\varphi$ sa výška dosky v mieste daného obdĺžnika zmení o $x\,\mathrm{d}\varphi$. Tým pádom sa tam objem ponorenej časti zmení o

$$\mathrm{d}V = x\,\mathrm{d}\varphi a\,\mathrm{d}x\,.$$

Aby sme z toho dostali element sily, prenásobíme to $g\rho_\mathrm{v}$, a element momentu sily z toho zas dostaneme prenásobením x

$$\mathrm{d}M = x\,\mathrm{d}F = xg\rho_\mathrm{v}\,\mathrm{d}V = g\rho_\mathrm{v}ax^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x\,,$$

čo preintegrujeme od $-b/2$ po $b/2$

$$M = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} g\rho_\mathrm{v}ax^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x = g\rho_\mathrm{v}a\,\mathrm{d}\varphi\frac{1}{3}[x^3]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{3}g\rho_\mathrm{v}a\frac{b^3}{4}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Doska je do rovnovážnej polohy vracaná momentom sily, pre ktorý sme dostali akúsi uhlovú tuhosť a veľkosti $k_\varphi = (1/12)g\rho_\mathrm{v}ab^3$ krát uhol vychýlenia.

Nakoniec ešte potrebujeme vyjadriť uhlovú zotrvačnosť, inými slovami moment zotrvačnosti okolo našej osi. Z definície by sa samozrejme dala spočítať integráciou, ale môžeme aj využiť fakt, že pri pohľade v smere osi je doska obdĺžnik, a teda bude mať moment zotrvačnosti homogénneho obdĺžnika so stranami b, c a hmotnosťou m. Hmotnosť dosky je pritom $m = abc\rho_\mathrm{d}$. Dosadíme do vzorca pre moment zotrvačnosti obdĺžniku

$$J = \frac{1}{12}abc\rho_\mathrm{d}(b^2 + c^2)\,.$$

Tým pádom bude uhlové zrýchlenie $\varepsilon = M/J$ v smere opačnom ako výchylka, čiže pohybová rovnica bude

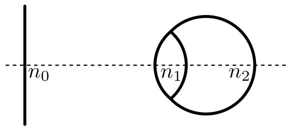
$$\mathrm{d}\ddot{\varphi} + \frac{k_\varphi}{J}\,\mathrm{d}\varphi = 0\,,$$

čo je rovnica pre lineárny harmonický oscilátor. Vynecháme prednášku o jej riešení a proste dosadíme do vzorca na periódu malých kmitov

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{k_\varphi}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}abc\rho_\mathrm{d}(b^2+c^2)}{\frac{1}{12}g\rho_\mathrm{v}ab^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{c(b^2+c^2)}{2gb^2}} \doteq 0{,}14\,\mathrm{s}\,.$$

Šimon Pajger
legolas@fykos.cz

Úloha FE ... mobilní zrcadlo



Teri se koukala na obrazovku svého mobilu ze vzdálenosti 20,0 cm*. V jednu chvíli ji ale upoutal její odraz na obrazovce a zaostřila na něj. Kolikrát musela zvětšit poloměr křivosti čočky ve svém oku, pokud budeme předpokládat, že je tato čočka symetrická a tenká? Poloměr kulového oka je* 1,20 cm*, index lomu vzduchu je* $n_0 = 1{,}00$*, čočky* $n_1 = 1{,}42$ *a sklivce* $n_2 = 1{,}34$*.*

Teri přidávala stories na FYKOSí instagram.

V této úloze použijeme následující znaménkovou konvenci. Předmětová i obrazová vzdálenost je záporná nalevo od rozhraní (resp. kladná napravo od rozhraní) a poloměr křivosti čočky je kladný, když střed křivosti leží napravo od rozhraní (resp. záporný, když leží nalevo). Vzdálenost předmětu je proto $a_1 = -20\,\mathrm{cm}$. Paprsek jde zleva doprava, a proto je střed křivosti prvního rozhraní kladný a druhého záporný.

Čočku obklopuje z jedné strany vzduch a z druhé sklivec. Proto použijeme pro každé rozhraní čočky rovnici pro zobrazení kulovým rozhraním

$$n_0\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right) = n_1\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{R}\right)\,,$$

kde n_0 je index lomu prvního prostředí, n_1 index lomu druhého prostředí, a vzdálenost předmětu, a' vzdálenost obrazu a R je poloměr křivosti rozhraní (čočky).

Nejprve spočítáme, kam se zobrazí obrazovka. Pro první rozhraní, kde je dle znaménkové konvence poloměr křivosti čočky kladný, dostaneme rovnici

$$n_0\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R_1}\right) = n_1\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{R_1}\right)\,,$$

kde n_0 je index lomu vzduchu, n_1 index lomu čočky, a_1 vzdálenost předmětu (zde vzdálenost obrazovky), s' vzdálenost obrazu a R_1 je poloměr křivosti čočky. Převrácená hodnota vzdálenosti obrazu je tedy

$$\frac{1}{s'} = \frac{n_0}{n_1}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{1}{R_1}\,.$$

Vzdálenost tohoto obrazu nyní určíme jako vzdálenost předmětu pro zobrazení druhým rozhraním čočky $s' = s$. Opět použijeme rovnici pro zobrazení kulovým rozhraním

$$n_1\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{R_1}\right) = n_2\left(\frac{1}{a_1'} + \frac{1}{R_1}\right)\,,$$

kde se před členem $1/R_1$ změnilo znaménko, protože je zde kvůli znaménkové konvenci záporné R_1 (díky symetrii čočky je však absolutní hodnota stejná jako u prvního rozhraní). Dále je v rovnici a_1' vzdálenost předmětu, n_2 je index lomu sklivce a za $1/s$ si dosadíme výsledek předchozí rovnice. Pokud má být obraz zaostřený, musí se zobrazit na sítnici, tedy $a_1' = 2r$, kde r je poloměr oka.

Celkově si vyjádříme poloměr křivosti z předchozí rovnice

$$R_1 = \frac{2a_1 r(2n_1 - n_0 - n_2)}{2n_0 r - n_2 a_1} \,.$$

Při pohledu na odraz na něj Teri zaostřila. Tento odraz je od obrazovky stejně vzdálený jako ona, tudíž dostáváme pro předmět novou vzdálenost $a_2 = 2a_1$ a nový poloměr křivosti R_2 si vyjádříme podle předchozí rovnice jako

$$R_2 = \frac{4a_1 r(2n_1 - n_0 - n_2)}{2n_0 r - 2n_2 a_1} \,.$$

Když si dáme do poměru R_1 a R_2, dostaneme výslednou změnu poloměru křivosti

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{2n_0 r - n_2 a_1}{n_0 r - n_2 a_1} \doteq 1{,}04 \,.$$

Teri tedy musela zvětšit poloměr křivosti svojí čočky o $4\,\%$.

Tereza Hochmanová
tereza.hochmanova@fykos.cz

Úloha FF ... hmotný bod v kulatém rohu

Uvažujme rovinu ohraničenou mantinelem ve tvaru kružnice o poloměru $R = 15\,\mathrm{m}$. Hmotný bod se nachází uvnitř těsně u hrazení. Náhle je vyslán rychlostí $v_0 = 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ tečně k mantinelu. Tření mezi podložkou a hmotným bodem je dáno koeficientem tření $f = 0{,}60$, stejně jako tření mezi ním a mantinelem. Za jak dlouho se bod zastaví?

Jarda se inspiroval svou oblíbenou úlohou.

Třecí síla je dána jako

$$F_\mathrm{T} = -fF_\mathrm{N} \,,$$

kde F_N je normálová síla na podložku nebo na mantinel, znaménko minus vyjadřuje, že třecí síla působí proti směru pohybu hmotného bodu. Pro tření mezi hmotným bodem a podložkou třecí síla odpovídá

$$F_\mathrm{T} = -fmg \,,$$

pro tření mezi hmotným bodem a mantinelem je dána jako

$$F_\mathrm{TO} = -fm\frac{v^2}{R} \,.$$

Koeficient v^2/R vyjadřuje odstředivé zrychlení působící na hmotný bod

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \,.$$

Pohybovou rovnici hmotného bodu (kde místo dráhy x bereme v potaz rychlost v) pak můžeme zapsat ve tvaru

$$m\dot{v} = -fmg - fm\frac{v^2}{R}\,.$$

To je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Řešíme ji integrací se substitucí $u = v/\sqrt{gR}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{fg}\dot{v} &= -1 - \frac{v^2}{gR}\,,\\ -\frac{1}{fg}\frac{\dot{v}}{1+\frac{v^2}{gR}} &= 1\,,\\ -\frac{1}{fg}\int\frac{1}{1+\left(\frac{v}{gR}\right)^2}\,\mathrm{d}v &= t\,,\\ -\frac{1}{f}\sqrt{\frac{R}{g}}\int\frac{1}{1+(u)^2}\,\mathrm{d}u\ &= t\,,\\ -\frac{1}{f}\sqrt{\frac{R}{g}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{gR}} &= t + t_0\,,\\ v &= -\sqrt{gR}\operatorname{tg}\left(f\sqrt{\frac{g}{R}}\left(t+t_0\right)\right)\,. \end{aligned}$$

Integrační konstantu t_0 můžeme vyjádřit z počáteční podmínky $v(0) = v_0$ jako

$$t_0 = -\frac{1}{f}\sqrt{\frac{R}{g}}\operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{gR}}\right)\,.$$

Celkové řešení pro rychlost je pak

$$v(t) = -\sqrt{gR}\operatorname{tg}\left(f\sqrt{\frac{g}{R}}t - \operatorname{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{gR}}\right)\right)\,.$$

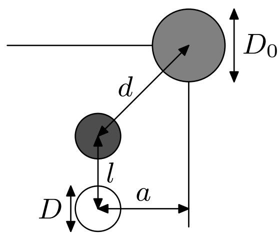
Nyní již máme v podstatě vyhráno. Chceme zjistit, kdy bude rychlost v nulová. Stačí si uvědomit, že funkce tangens nabývá hodnoty 0 v bodě 0, což odpovídá situaci, kdy

$$t = -t_0 = 2{,}4\,\mathrm{s}\,,$$

přičemž t_0 jsme vyjádřili již dříve při hledání řešení pro rychlost.

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha FG ... kulečník



Petr hraje kulečník. Zbývá mu pouze černá koule, která se nachází ve vzdálenosti $d = 30\,\mathrm{cm}$ od středu jamky o průměru $D_0 = 11{,}4\,\mathrm{cm}$, do které ji má trefit, a ve vzdálenosti $a = 10\,\mathrm{cm}$ od jednoho z mantinelů. Bílá koule je vzdálená o $l = 1{,}0\,\mathrm{m}$ od černé koule a je ve vzdálenosti a od stejného mantinelu jako černá koule. Jaká je mezní kinetická energie, kterou musí Petr předat bílé kouli tágem, aby černá koule spadla do díry? Koule rovnoměrně zpomalují se zpomalením $\alpha = 30\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-2}}$ a Petr černou koulí míří na střed díry. Uvažujte, že obě koule mají stejnou hmotnost $m = 160\,\mathrm{g}$ a průměr $D = 5{,}7\,\mathrm{cm}$ a že jejich srážka je dokonale pružná. Roztáčení koulí zanedbejte. Všechny uvedené vzdálenosti jsou měřeny od středů koulí.

Petr chodíval s kamarády na kulečník.

Koule spadne do jamky právě tehdy, když se její střed ocitne za okrajem jamky. Protože koule navíc rovnoměrně zpomaluje se zrychlením α, získáváme pro mezní rychlost černé koule podmínky

$$v_\mathrm{m} - \alpha t = 0\,,$$

$$v_\mathrm{m} t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = d - \frac{D_0}{2}\,,$$

kde t je čas, za který černá koule dosáhne okraje jamky. Vyjádříme-li z první rovnice čas t, můžeme z druhé rovnice vyjádřit mezní rychlost v_m jako

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\alpha(2d - D_0)} \doteq 38\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Při srážce předá bílá koule černé kouli rychlost dle zákona zachování hybnosti. Zde ovšem uvažujeme pouze tu složku rychlosti, která má směr přímky odpovídající spojnici středů koulí při srážce. Všimněme si, že bílá koule předá té černé celou tuto složku rychlosti, protože mají stejnou hmotnost m a černá koule je před srážkou v klidu. To můžeme zapsat jako

$$v_\mathrm{m} = v\cos\gamma\,,$$

kde v je rychlost bílé koule před srážkou (popřípadě rychlost černé koule po srážce) a γ úhel svíraný vektorem rychlosti bílé koule a spojnicí koulí při srážce. Rozeberme nyní geometrii úlohy, budeme při tom vycházet z nákresu v zadání. Pro úhel θ mezi vodorovným směrem a spojnicí středů černé koule se středem jamky platí

$$\cos\theta = \frac{a}{d}\,,$$

$$\theta = \arccos\frac{a}{d} \doteq 70{,}5^\circ\,.$$

Protože d je nejkratší vzdálenost mezi černou koulí a jamkou, chceme černou kouli vystřelit pod tímto úhlem. Tedy chceme, aby bílá koule trefila černou kouli takovým způsobem, aby úhel mezi spojnicí středů koulí a vodorovným směrem při srážce byl roven θ. Označíme-li φ úhel, pod kterým musíme vystřelit bílou kouli, získáváme z geometrie

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{D\cos\theta}{l - D\sin\theta}\,,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{D\cos\theta}{l - D\sin\theta} \doteq 1{,}15^\circ\,.$$

Pro γ pak platí

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta + \varphi \doteq 20{,}6^\circ \,.$$

Nyní určíme, jaká musí být minimálně velikost počáteční rychlosti v_0. Označíme-li L dráhu bílé koule před srážkou, můžeme spočítat

$$L = \frac{D\cos\theta}{\sin\varphi} \doteq 95\,\mathrm{cm}\,.$$

Pro rychlost v_0 musí platit

$$v_0 - \alpha T = v\,,$$
$$v_0 T - \frac{1}{2}\alpha T^2 = L\,,$$

kde T je čas, za který bílá koule urazí vzdálenost L. Vyjádřením T z první rovnice a dosazením do druhé rovnice za T a v získáváme pro v_0

$$v_0 = \sqrt{2\alpha\frac{D\cos\theta}{\sin\varphi} + \frac{\alpha\left(2d - D_0\right)}{\cos^2\gamma}} \doteq 86\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Nyní už jenom dosadíme do známého vzorce pro kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_0^2 = m\alpha\left(\frac{D\cos\theta}{\sin\varphi} + \frac{\left(d - \frac{D_0}{2}\right)}{\cos^2\gamma}\right) \doteq 59\,\mathrm{mJ}\,.$$

Petr Sacher
petr.sacher@fykos.cz

Úloha FH ... s tužkou na hraně

Na pravém kraji stolu je umístěna tužka délky l se zanedbatelnou tloušťkou tak, že 3/5 její délky leží na stole a zbývající 2/5 visí ve vzduchu. V jaké největší vzdálenosti d_max od stolu můžeme do tužky zespodu cvrnknout impulsem síly směřujícím nahoru, aby se tužka ihned poté celá zvedla ze stolu (a tedy se pouze nepřeklápěla přes svůj levý konec)? Výsledek uveďte jako poměr d_max/l. *Kuba si hrál na přednášce s tužkou.*

Označme velikost impulsu síly I, vzdálenost působiště impulsu síly od těžiště tužky x a hmotnost tužky m. Poznamenejme, že abychom impulsem působili skutečně ve vzduchu a nikoli na stole, musí platit

$$x > \frac{l}{10}\,.$$

Impuls síly tužce udělí hybnost p a moment hybnosti L vzhledem k ose otáčení procházející jejím těžištěm. Pokud se má tužka ihned zvednout ze stolu (a nedostane tedy od stolu žádný další impuls síly), dostáváme z první a druhé věty impulsové

$$\Delta p = F\Delta t = I \quad\Rightarrow\quad p = I\,,$$
$$\Delta L = xF\Delta t = xI \quad\Rightarrow\quad L = Ix\,.$$

Nyní zkoumejme vertikální posun levého konce tužky $\mathrm{d}y_0$ v prvním infinitezimálním okamžiku $\mathrm{d}t$. Pro svislou y-ovou souřadnici těžiště y máme

$$p = m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \frac{p\,\mathrm{d}t}{m} = \frac{I\,\mathrm{d}t}{m}\,.$$

Tužka se zároveň otočí kolem svého těžiště o $\mathrm{d}\theta$, pro které platí

$$L = J\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{12}ml^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta = \frac{12L\,\mathrm{d}t}{ml^2} = \frac{12Ix\,\mathrm{d}t}{ml^2}\,,$$

přičemž jsme použili vztah pro moment setrvačnosti tenké tyče vzhledem k ose procházející jejím těžištěm $J = (1/12)ml^2$.

Z geometrie vidíme, že pro vertikální posun levého konce tužky $\mathrm{d}h$ způsobený otočením o $\mathrm{d}\theta$ platí

$$-\operatorname{tg}\mathrm{d}\theta = -\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\,\mathrm{d}h}{l} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}h = -\frac{l\,\mathrm{d}\theta}{2} = -\frac{6Ix\,\mathrm{d}t}{ml}$$

a celkem tak dostáváme

$$\mathrm{d}y_0 = \mathrm{d}y + \mathrm{d}h = \frac{I\,\mathrm{d}t}{m}\left(1 - \frac{6x}{l}\right)\,.$$

Tužka se od stolu odlepí právě tehdy, když $\mathrm{d}y_0 > 0$. Dostáváme tedy podmínku

$$\left(1 - \frac{6x}{l}\right) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{l}{6}\,.$$

Zadání se však ptalo na maximální vzdálenost od kraje stolu

$$d_{\max} = x_{\max} - \frac{l}{10} = \frac{l}{15}\,.$$

Dostáváme tak výsledek

$$\frac{d_{\max}}{l} = \frac{1}{15}\,.$$

Okomentujme ještě fakt, že na řešení úlohy nemá vliv tíhové zrychlení. Podmínka $\mathrm{d}y_0 > 0$ znamená v řeči derivací

$$\dot{y}_0(0) > 0\,, \tag{1}$$

funkce $y_0(t)$ tak musí být rostoucí (což je zřejmě přesně to, co požadujeme). Tíhové zrychlení však bude vždy úměrné členu $\ddot{y}_0$ a v podmínce (1) tak nakonec nebude figurovat (ovlivní tedy její konvexitu/konkávnost, ale nikoli její monotonii).

Jakub Koňárek
`jakub.konarek@fykos.cz`

Úloha GA ... nezanedbáme Saturn

Jaký je poměr gravitační síly, kterou na těleso o hmotnosti $m = 10{,}0\,\mathrm{kg}$ *působí Saturn, vůči té, kterou na něj působí jeho prstence? Uvažujte, že se těleso nachází přesně na ose prstenců ve vzdálenosti* $D = 100\,000\,\mathrm{km}$ *od středu planety. Dále pokládejte prstence za homogenní disk s konstantní plošnou hustotou* $\rho = 315\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-2}}$ *o vnitřním poloměru* $R_0 = 67\,300\,\mathrm{km}$ *a vnějším poloměru* $R_1 = 140\,000\,\mathrm{km}$ *se středem ve středu Saturnu. Saturn má hmotnost* $M_\mathrm{S} = 5{,}68 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}$.

Pepa se rozhodl opustit svoji komfortní zónu.

Nejprve spočteme gravitační sílu, kterou na těleso působí Saturn

$$F_\mathrm{S} = G\frac{M_\mathrm{S} m}{D^2}\,.$$

Nyní určíme sílu od prstenců. Uvažujme tenkou obruč o ploše $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$, která se nachází ve vzdálenosti r od středu planety. Tato obruč má všude stejnou vzdálenost od tělesa, proto se síly působící na těleso ve směru do středu planety sečtou a síly v rovině kolmé na spojnici těleso-střed planety se vykrátí. Výsledná síla, kterou tato obruč působí na Saturn, bude

$$\mathrm{d}F_\mathrm{p} = G\frac{m\rho 2\pi r\,\mathrm{d}r}{r^2 + D^2}\frac{D}{\sqrt{r^2 + D^2}}$$

kde $r^2 + \mathrm{D}^2$ určuje kvadrát vzdálenosti prstence od tělesa a $D/\sqrt{r^2 + D^2}$ vyjadřuje složku síly ve směru do středu planety. Výslednou sílu dostaneme integrací od R_0 do R_1 (integrál řešíme substitucí t za $r^2 + D^2$).

$$F_\mathrm{p} = -2mD\rho\pi G\left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + D^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + D^2}}\right)$$

Dosadíme do poměru

$$\frac{F_\mathrm{S}}{F_\mathrm{p}} = \frac{M_\mathrm{S}\sqrt{(R_0^2 + D^2)(R_1^2 + D^2)}}{2D^3\rho\pi\left(\sqrt{R_1^2 + D^2} - \sqrt{R_0^2 + D^2}\right)} \doteq 1{,}16 \cdot 10^8\,.$$

Síla, kterou na těleso působí Saturn, je více než 10^8krát větší než síla od prstenců.

Radovan Lev
radovan.lev@fykos.cz

Úloha GB ... elektrostatická pyramida

Mějme čtverec o délce strany $a = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Do jeho vrcholů umístíme kladné bodové náboje o velikosti $Q = 15\,\mathrm{\mu C}$. Uvažme ve středu čtverce pevnou osu kolmou na jeho povrch. Když na osu navlékneme korálek o hmotnosti $m = 80\,\mathrm{g}$ nabitý kladným nábojem $q = 2{,}0\,\mathrm{\mu C}$, jaká bude perioda malých kmitů korálku? *Petr vzpomínal na Egypt.*

Označme si výšku korálku na ose jako z. Pro tíhovou sílu samozřejmě platí

$$F_\mathrm{T} = mg\,.$$

Elektrostatickou sílu můžeme určit dle známého vztahu

$$F_\mathrm{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{R^2}\,,$$

kde ε_0 je permitivita vakua a R vzdálenost korálku od náboje Q. Z geometrie můžeme tuto vzdálenost vyjádřit pomocí Pythagorovy věty jako

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{2} + z^2}\,.$$

Zde si však musíme uvědomit jeden fakt – x-ové a y-ové složky sil působících na náboj q od protilehlých nábojů Q se navzájem vynulují (a navíc je pohyb korálku omezen osou na z-ový směr). Z toho plyne, že nám stačí uvažovat z-ovou složku síly F_E, tedy její průmět do osy z

$$F_{\mathrm{E},z} = \frac{Qq\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2+2z^2}\,,$$

kde θ je úhel mezi osou a spojnicí mezi náboji Q, q. Pomocí geometrie můžeme vyjádřit

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{a^2+2z^2}}\,,$$

dostáváme tak

$$F_{\mathrm{E},z} = \frac{\sqrt{2}Qq}{2\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(a^2+2z^2\right)^{3/2}}\,.$$

Protože máme náboje čtyři, celkovou sílu získáme jako čtyřnásobek síly $F_{\mathrm{E},z}$ sečtený s tíhovou silou F_T

$$F = \frac{2\sqrt{2}Qq}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(a^2+2z^2\right)^{3/2}} - mg\,.$$

Nyní spočítáme periodu malých kmitů. Pohybová rovnice pro korálek je

$$m\ddot{z} - \frac{2\sqrt{2}Qq}{\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(a^2+2z^2\right)^{3/2}} + mg = 0\,.$$

Tu pak můžeme upravit, definujeme-li stabilní polohu korálku $F(z_0) = 0$ a přejdeme-li k nové souřadnici (výchylce) $\xi = z - z_0$. K určení z_0 bychom museli řešit kubickou rovnici, my si proto vystačíme s numerickým dohledáním její hodnoty na kalkulačce, k tomu ale později. Závislost síly $F(\xi)$ teď můžeme linearizovat díky předpokladu $\xi \ll z_0$.

$$\frac{z_0+\xi}{\left(a^2+2(z_0+\xi)^2\right)^{3/2}} \approx \frac{z_0}{\left(a^2+2z_0^2\right)^{3/2}} + \frac{\xi}{\left(a^2+2z_0^2\right)^{3/2}} - \frac{6z_0^2\xi}{\left(a^2+2z_0^2\right)^{5/2}} =$$
$$= \frac{\pi\varepsilon_0 mg}{2\sqrt{2}Qq} - \frac{4z_0^2-a^2}{\left(a^2+2z_0^2\right)^{5/2}}\xi \quad\Rightarrow\quad \ddot{\xi} + \frac{2\sqrt{2}Qq}{\pi m\varepsilon_0}\frac{4z_0^2-a^2}{\left(a^2+2z_0^2\right)^{5/2}}\xi = 0\,.$$

Než abychom tuto diferenciální rovnici řešili (například variací konstant), pomůžeme si tím, že víme, že libovolná rovnice harmonického oscilátoru má tvar

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0\,,$$

kde ω je úhlová frekvence kmitání. Tedy v případě, že je náš faktor před ξ kladný (platí $z_0 > a/2$), bude tato frekvence reálná a můžeme ji spočíst jako

$$\omega = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}Qq}{\pi m\varepsilon_0}\frac{4z_0^2-a^2}{\left(a^2+2z_0^2\right)^{5/2}}}\,.$$

Periodu kmitů pak určíme ze vztahu $\omega = 2\pi/T$

$$T = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\pi^3 m\varepsilon_0}{Qq}\frac{\left(2z_0^2+a^2\right)^{5/2}}{4z_0^2-a^2}}.$$

Na určení číselné hodnoty výsledku ještě potřebujeme numericky dohledat hodnotu z_0. To můžeme udělat například iterační metodou, která se používá k řešení analyticky neřešitelných rovnic. Spočívá v tom, že si z řešené rovnice vyjádříme hledanou proměnnou na jednu stranu. Na druhé straně rovnice nám pak zůstane nějaký výraz, který stále obsahuje tuto proměnnou, dosadíme tam za ni tedy nějaký její odhad. Vypočtením hodnoty výrazu dostáváme nový, lepší odhad hledané hodnoty, ten můžeme tedy opět dosadit. Takto umíme výpočet iterovat na kalkulačce dokud se výsledek nepřestane měnit (posloupnost skonverguje do hledaného řešení). V našem případě máme 2 možnosti jak hledané z_0 vyjádřit z rovnice $F(z_0) = 0$, každá skonverguje do jiného řešení.

$$\frac{2\sqrt{2}Qq}{\pi\varepsilon_0}\frac{z_0}{\left(a^2+2z_0^2\right)^{3/2}} - mg = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_{0,n} = \frac{\pi\varepsilon_0 mg}{2\sqrt{2}Qq}\left(a^2+2z_{0,n-1}^2\right)^{3/2} & \to z_{0,\infty} \doteq 0{,}033\,\mathrm{m} \\ z_{0,n} = \sqrt{\left(\frac{Qq\,z_{0,n-1}}{\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{2/3} - \frac{a^2}{2}} & \to z_{0,\infty} \doteq 1{,}087\,\mathrm{m} \end{cases}$$

Jak můžeme vidět, pouze druhé řešení splňuje podmínku $z_0 > a/2$, platí tedy $z_0 \doteq 1{,}09\,\mathrm{m}$. To už stačí jenom dosadit do odvozeného vztahu pro periodu korálku a dostaneme $T \doteq 1{,}6\,\mathrm{s}$.

Petr Sacher
`petr.sacher@fykos.cz`

Jakub Kliment
`jakub.kliment@fykos.cz`

Úloha GC ... nebeské akvárko

V nebi se nachází akvárium o výšce $h = 0{,}50\,\mathrm{m}$ naplněné svěcenou vodou, jejíž index lomu klesá lineárně s výškou tak, že má u dna hodnotu $n_0 = 1{,}6$ a u hladiny $n_1 = 1{,}3$. Svatý Petr zespodu do akvária namířil laserový paprsek s úhlem dopadu 45°. Určete horizontální vzdálenost bodu, ve kterém paprsek na dně do akvária vstoupil, od bodu, ve kterém jej na hladině opustil. Uvažujte index lomu vzduchu $n_{\mathrm{vz}} = 1$ (přesně) a zanedbatelně tenké stěny akvária.

Nápověda:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} x\,, \quad x \in \langle 1, \infty)\,.$$

Kubu a Petra osvítila stejná myšlenka.

Zaveďme souřadný systém s horizontální osou x, vertikální osou y a bodem $(0,0)$ v místě vstupu paprsku do akvária. Nechť $y(x)$ značí skutečnou trajektorii paprsku v akváriu. Než se pustíme do řešení samotné úlohy, situaci si trochu zjednodušíme. Rozdělme pomyslně akvárium na několik ekvidistantních vrstev, každou s konstantním indexem lomu n_k. V jednotlivých vrstvách se pak bude paprsek šířit po přímce. Označíme-li jako α_k úhel, jenž k-tá taková přímka svírá se svislicí, Snellův zákon říká, že veličina $n_k \sin\alpha_k$ je konstantní pro všechna k. Je snadné si uvědomit, že tuto myšlenku můžeme zobecnit pro nekonečně mnoho vrstev, tedy pro spojitou změnu indexu lomu. Pro paprsek vstupující do akvária ze vzduchu pak v této limitě dostáváme

$$n(y)\sin\alpha(y) = n_{\mathrm{vz}}\,\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} =: a_0\,. \tag{2}$$

Index lomu n v závislosti na výšce y vyjádříme jako

$$n(y) = n_0 + \frac{n_1 - n_0}{h}y =: n_0 + ky\,.$$

Pro úhel α z geometrie pravoúhlého trojúhelníku a z vlastností derivace dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}\,.$$

Rovnice (2) se tak dá upravit do tvaru

$$\frac{n_0 + ky}{\sqrt{1+(y')^2}} = a_0\,.$$

To je obyčejná diferenciální rovnice, kterou algebraickými úpravami můžeme převést do separovaného tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{\frac{(n_0+ky)^2}{a_0^2} - 1}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{(n_0+ky)^2}{a_0^2} - 1}} = \pm\,\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

Dále budeme uvažovat pouze variantu s plusem, k druhému případu se vrátíme později. Rovnici (3) nyní můžeme zintegrovat. Na její levé straně dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{(n_0+ky)^2}{a_0^2} - 1}} = \frac{a_0}{k}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{a_0}{k}\operatorname{argcosh} u\,,$$

kde $u = (n_0 + ky)/a_0$. Lehce nahlédneme, že $u > 1$, a $\operatorname{argcosh} u$ je tak skutečně definovaný.

Pravou stranu zintegrujeme triviálně a dostáváme

$$\frac{a_0}{k}\operatorname{argcosh}\frac{n_0+ky}{a_0} = x - \xi, \tag{4}$$

kde ξ je integrační konstanta. Vyjádříme-li nyní z rovnice (4) souřadnici y, získáme

$$y = \frac{1}{k}\left(a_0\cosh\frac{k\,(x-\xi)}{a_0} - n_0\right). \tag{5}$$

Protože je kosinus hyperbolický sudá funkce, vidíme, že na znaménku v rovnici (3) nezáleží. Zbývá stanovit parametr ξ. Ten vyjádříme jednoduše z rovnice (4) s použitím okrajovéme podmínky $y(0) = 0$

$$\xi = -\frac{a_0}{k}\operatorname{argcosh}\frac{n_0}{a_0}\,.$$

Výsledná křivka má tvar *řetězovky*, která tvoří v tomto případě konkávní oblouk. Takový tvar mají právě volně zavěšené řetězy. Jak moc je toto zjištění překvapivé, zde nebudeme hlouběji rozebírat. Poznamenejme jen, že obě úlohy lze elegantně zformulovat pomocí *variačního počtu*, který nás v obou případech vede ke stejné variační úloze.

Horizontální vzdálenost druhého průsečíku zjistíme dosazením $y = h$ do výsledného vztahu (5). Jak bychom očekávali, dostáváme dvě řešení

$$x = \xi \pm \frac{a_0}{k}\operatorname{argcosh}\frac{n_0+kh}{a_0}\,,$$

z nichž to větší odpovídá případu, kdy se paprsek (poté, co se již dostal na hladině z akvária a otočil se na vrcholu oblouku) vrací akváriem zpět, a je tedy nefyzikální. Snadno nahlédneme, že správnou volbou je znaménko plus a hledaná vzdálenost je tedy

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{a_0}{k}\operatorname{argcosh}\frac{n_0+kh}{a_0} - \frac{a_0}{k}\operatorname{argcosh}\frac{n_0}{a_0}\,,\\ &= \frac{a_0}{k}\left(\operatorname{argcosh}\frac{n_1}{a_0} - \operatorname{argcosh}\frac{n_0}{a_0}\right) \doteq 0{,}28\,\mathrm{m}\,.\end{aligned}$$

Jakub Koňárek
jakub.konarek@fykos.cz

Úloha GD ... zvláštní rovnováha

Mějme nevodivý válec s průřezem $S = 10\,\mathrm{cm^2}$. Z obou stran jej uzavřeme kovovými písty tak, že mezi nimi zůstane uvězněno nějaké množství ideálního plynu o teplotě $T = 300\,\mathrm{K}$. Okolí má tlak $p_\mathrm{a} = 101\,\mathrm{kPa}$ a vzdálenost mezi písty se ustálí na $d_0 = 1{,}0\,\mathrm{mm}$. Následně písty připojíme k baterii, která způsobí, že mezi nimi bude napětí $U = 250\,\mathrm{V}$. O jaké Δd se písty přiblíží v důsledku připojeného napětí? Uveďte záporné znaménko, pokud se písty vzdálí. Můžete předpokládat, že $d^2 \ll S$, plyn uvnitř válce bude mít díky tepelné výměně s okolím konstantní teplotu T a že relativní permitivita bude $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$.

Lego už dlouho chtěl dát takovou úlohu, ale byla bolest ji zfunkčnit.

Keď je medzi piestami napätie, znamená to, že sú na nich opačné nábojové hustoty a opačné náboje sa priťahujú. Oproti tomu plyn uzavretý medzi piestami ich bude tlačiť od seba, ale okolitá atmosféra zas k sebe. Piesty sa teda ustália v takej vzdialenosti, kedy sa tieto dve sily vyrovnajú. Poďme teda spočítať veľkosti týchto síl v závislosti na vzdialenosti medzi piestami.

Začneme tlakom. Upravíme si stavovú rovnicu $p = nRT/V$, kde n, R sú konštantné, T je zadané a V je objem, v ktorom je plyn uzavretý. Nakoľko valec má prierez S, tak pre vzdialenosť piestov d bude platiť $V = Sd$. Čiže tlak plynu bude $p = nRT/(Sd)$. Z opačnej strany na piest tlačí atmosférický tlak p_a, tým pádom výsledná sila, ktorou vzduch pôsobí na piest, bude

$$F_\mathrm{p} = S\Delta p = \frac{nRT}{d} - p_\mathrm{a}S\,,$$

z čoho si môžeme okrem iného dopočítať, že n uzavreté medzi piestami je $n = p_\mathrm{a}Sd_0/(RT)$.

Pre dostatočne malé vzdialenosti sa budú piesty správať ako kondenzátor. Ten bude mať kapacitu $C = \varepsilon_0 S/d$, čiže na piestoch bude náboj s veľkosťou $Q = UC = U\varepsilon_0 S/d$. Tento náboj bude priťahovaný elektrickou intenzitou od náboja na opačnom pieste. Pre $d^2 \ll S$ bude táto intenzita rovná intenzite od nekonečnej platne nabitej plošnou hustotou náboja $\sigma = Q/S$, čiže

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{2S\varepsilon_0}\,.$$

Pozor! Musíme brať len intenzitu od druhej platne a nie intenzitu vnútri kondenzátora (tá je dvojnásobná), lebo to by platňa pôsobila „sama na seba“. Matematicky ide o to, že intenzita je v platni nespojitá.

Pôsobiaca sila má potom veľkosť

$$F_Q = EQ = \frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} = \frac{U^2\varepsilon_0^2 S^2}{2d^2 S\varepsilon_0} = \frac{U^2\varepsilon_0 S}{2d^2}\,.$$

Veľkosti týchto dvoch síl musia byť rovné, z čoho vieme vyjadriť vzdialenosť d, pre ktorú sa vyrušia

$$
\begin{aligned}
F_\mathrm{p} &= F_Q \\
\frac{nRT}{d} - p_\mathrm{a}S &= \frac{U^2\varepsilon_0 S}{2d^2}\,, \\
0 &= d^2 p_\mathrm{a} S - dnRT + \frac{1}{2}U^2\varepsilon_0 S\,, \\
d &= \frac{nRT \pm \sqrt{(nRT)^2 - 2S^2 p_\mathrm{a} U^2 \varepsilon_0}}{2p_\mathrm{a}S}\,, \\
d &= \frac{p_\mathrm{a}Sd_0 \pm \sqrt{(p_\mathrm{a}Sd_0)^2 - 2S^2 p_\mathrm{a} U^2 \varepsilon_0}}{2p_\mathrm{a}S}\,, \\
d &= \frac{d_0 \pm \sqrt{d_0^2 - 2U^2\varepsilon_0/p_\mathrm{a}}}{2}\,,
\end{aligned}
$$

kde sme v predposlednom kroku iba dosadili z počiatočnej podmienky $p_\mathrm{a}Sd_0 = nRT$.

Teraz sa musíme zamyslieť, ktorý z koreňov nás zaujíma. Pre nulové U by sme mali dostať $d = d_0$, čo presne dostaneme pre koreň s plusom, čiže berieme ten. Ak by niekoho zaujímalo, tak ten druhý koreň je nestabilný – sily sa v ňom síce rovnajú, ale stačí aby sa d o trocha zmenšilo a zrazu je príťažlivá sila silnejšia než odpudivá a dosky sa priblížia až na nulovú vzdialenosť (čo je navyše celkom nefyzikálne), alebo ak sa d trocha zväčší, tak naopak skončia v tom správnom koreni.

Teraz môžeme buď priamočiaro dosadiť a odčítať od d_0, alebo si môžeme všimnúť, že platí $d_0^2 \gg 2U^2\varepsilon_0/p_\mathrm{a}$, a spraviť Taylorov rozvoj do prvého rádu

$$
d = \frac{d_0 + d_0\sqrt{1 - \frac{2U^2\varepsilon_0}{p_\mathrm{a}d_0^2}}}{2} = d_0 - \frac{U^2\varepsilon_0}{2p_\mathrm{a}d_0}\,.
$$

Potom dostávame, že sa piesty priblížia o $\Delta d = U^2\varepsilon_0/(2p_\mathrm{a}d_0) \doteq 2{,}7\,\mathrm{nm}$, čo je veľkosť asi pár desiatok atómov.

Šimon Pajger
`legolas@fykos.cz`

Úloha GE ... sněžítko

Jarda má ozdobnou polokouli s vánočním motivem o poloměru $R = 3{,}3\,\mathrm{cm}$, která je celá naplněná vodou. V kouli jsou panáčci chystající se na zamrzlé jezírko, jež je vyznačeno odrazivou plochou v okolí osy symetrie. Jinde je naopak materiál na povrchu základny sněžítka matný. Ozdoba stojí na stole a Jarda na ni jednoho dne posvítil bodovým zdrojem ležícím na ose symetrie polokoule ve výšce $h = 29\,\mathrm{cm}$ nad deskou stolu. V jaké výšce nad nejvyšším bodem polokoule se paprsky po interakci s předmětem znovu protnou?

Jarda vymýšlel propagační předměty pro Výfuk.

Jestliže odrazivá část je jen v blízkém okolí osy symetrie sněžítka, budeme uvažovat pouze paprsky jdoucí blízko optické osy soustavy, a proto můžeme zůstat v aproximaci klasické geometrické optiky, kde se všechny paprsky protnou v jednom bodě. Dalším důležitým krokem je uvědomit si, že zrcadlo nám vzniklý obraz převrací kolem roviny symetrie, tedy kolem roviny podstavy sněžítka. Nic nám ale nebrání si situaci po odrazu překlopit za rovinu podstavy a řešit situaci tam, díky vlastnostem zrcadla naše řešení vyjde stejně. Nyní ovšem počítáme vlastně průchod paraxiálních paprsků skleněnou koulí, protože reálná polokoule sněžítka se v části za zrcadlem doplní o druhou polokouli. Problém jsme tedy jednoduchou úvahou převedli na trochu jednodušší.

Ani zde ale nedostaneme výsledek zadarmo. Na internetu nebo v nějakých učebnicích jsou rovnou uvedené výsledky pro ohniskovou vzdálenost kulové čočky, my je ale potřebujeme odvodit. Problémem je, že se nejedená o tenkou čočku, na které jsme možná z jiných úloh zvyklí, ale vzdálenost kulových rozhraní je nezanedbatelná (rovna přibližně $2R$), takže ne všechny známé vztahy zde platí. Existují postupy, jak vypočítat úlohy s tlustou čočkou, a my zvolíme ten nepřímočařejší – vypočítáme dráhu paprsku z onoho zdroje v jednotlivých částech a najdeme bod, ve kterém se opět protne s optickou osou.

Označme a vzdálenost zdroje od středu koule, a' naopak vzdálenost obrazu od středu. Podle zadání nakonec dosadíme $a = h$, a naše odpověď bude $h' = a' - R$.

Nechť ze zdroje vychází paprsek pod úhlem α vůči optické ose tak, že protíná rozhraní koule a vzduchu v bodě A vzdáleném y od optické osy. Pro tento bod platí

$$y = (a - R)\,\alpha = R\varphi\,,$$

čímž jsme definovali úhel φ, který svírá spojnice středu koule a bodu A s optickou osou. Připomeňme, že v paraxiální aproximaci pracujeme s malými úhly, takže platí $x \approx \sin x \approx \operatorname{tg} x$.

V bodě A se paprsek láme podle Snellova zákona. Na vzduchu svírá směr paprsku s kolmicí na povrch koule úhel $\beta = \alpha + \varphi$, uvnitř úhel mezi paprskem a spojnicí středu koule a bodu A označme jako γ. Pak platí

$$\beta = n\gamma\,,$$

což je tvar Snellova zákona v naší aproximaci, a za předpokladu, že index vzduchu je roven jedné. Úhel γ tedy závisí pouze na indexu lomu vody n. Sklo udržující tvar sněžítka je podle zadání velmi tenké, proto jej můžeme zanedbat.

Paprsek pokračuje objemem koule až na druhou stranu, kde narazí na druhé rozhraní. Zde se znovu zlomí a optickou osu pak protne v již definované vzdálenosti a'. Bod druhého zlomu definujme analogicky k prvnímu jako A', který je ve vzdálenosti y' od optické osy, a zaveďme úhly γ', β' a α' stejně, jako jsme to udělali na druhé straně koule. Zde tedy platí $\beta' = n\gamma'$.

Úloha je nyní definovaná, zbývá jen najít vzdálenost a'. Všimněme si, že trojúhelník A, A' a střed koule S je rovnoramenný trojúhelník s rameny o délce R. Platí proto $\gamma = \gamma'$. Odsud pak také $\beta = \beta'$, takže i

$$\alpha + \varphi = \alpha' + \varphi' \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{a - R} + \frac{y}{R} = \frac{y'}{a' - R} + \frac{y'}{R}\,.$$

Poloha a' by neměla záviset na y ani y', měli bychom proto najít ještě jeden vztah, který nám tyto dvě proměnné lineárně sváže. Ještě jsme se nezabývali tím, jak jsou obě rozhraní od sebe daleko, popišme to proto vztahem

$$\begin{aligned} y - y' &= 2R\left(\gamma' - \varphi'\right) = 2R\gamma' - 2R\varphi' = 2R\gamma' - 2y'\,,\\ y + y' &= 2R\gamma\,. \end{aligned}$$

Ze Snellova zákona postupně dosazujme za γ

$$y + y' = \frac{2R}{n}\beta = \frac{2R}{n}(\alpha + \varphi) = \frac{2R}{n}\left(\frac{y}{a-R} + \frac{y}{R}\right),$$

$$y' = y\frac{2R}{n}\left(\frac{1}{a-R} + \frac{1}{R} - \frac{n}{2R}\right).$$

Dosazením do naší předchozí rovnice s y a y' dostáváme

$$\frac{1}{a-R} + \frac{1}{R} = \left(\frac{1}{a'-R} + \frac{1}{R}\right)\frac{2R}{n}\left(\frac{1}{a-R} + \frac{1}{R} - \frac{n}{2R}\right),$$

odkud již zbývá pouze vyjádřit a'

$$\frac{n}{2R}\frac{\frac{1}{a-R} + \frac{1}{R}}{\frac{1}{a-R} + \frac{1}{R} - \frac{n}{2R}} - \frac{1}{R} = \frac{1}{a'-R},$$

$$\frac{n}{2R}\left(\frac{1}{1 - \frac{nR(a-R)}{2Ra}} - \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{a'-R},$$

$$a' = R\frac{2a - na + nR}{2a(n-1) - nR} + R,$$

$$a' = R\frac{a(2-n) + 2a(n-1)}{2a(n-1) - nR},$$

$$a' = \frac{nRa}{2a(n-1) - nR} \doteq 8{,}6\,\mathrm{cm}.$$

Pro správné zodpovězení úlohy musíme ještě odečíst poloměr koule

$$h' = a' - R \doteq 5{,}3\,\mathrm{cm}.$$

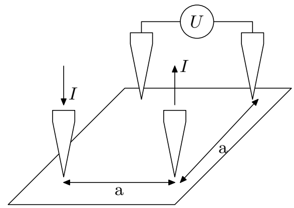
Předmět se zobrazí ve vzdálenosti 5,3 cm nad vrcholem předmětu. Mimochodem, podle Gaussovy zobrazovací rovnice můžeme vyjádřit ohniskovou vzdálenost koule jako

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{2R}{2(n-1)}.$$

Jaroslav Herman
jardah@fykos.cz

Úloha GF ... povrchová vodivost

Uvažujme nekonečně velkou vodivou rovinu. Ke dvěma bodům, které mají mezi sebou vzdálenost a, připojíme elektrody, mezi kterými necháme procházet proud I. K povrchu připojíme další dvě elektrody pro měření napětí tak, že s předchozími dvěma tvoří na povrchu čtverec. Naměříme mezi nimi napětí U. Jaká je povrchová vodivost roviny? *Jarda zjednodušil Karlovu úlohu.*



Abychom našli potenciál mezi rohy, ke kterým jsou připojené napěťové kontakty, spočítáme elektrické pole všude v rovině. Potenciál poté najdeme jako jeho integrál mezi těmito body. K výpočtu pole **E** použijeme tzv. Ohmův zákon v diferenciálním tvaru

$$\mathbf{j}_\mathrm{s} = \sigma_\mathrm{s}\mathbf{E}\,,$$

kde σ_s je povrchová vodivost a $\mathbf{j}_\mathrm{s}$ je povrchová hustota proudu. Ta udává, jaký náboj proteče kolmo na jednotkovou délku za jednotku času v daném bodě.

V této úloze je totiž docela přímočaré, jak najít proudovou povrchovou hustotu. Vyjdeme ze symetrie celé úlohy, nekonečnosti roviny a principu superpozice. Zaveďme 2D souřadný systém, kde je v jeho počátku připojen vodič, kterým do roviny teče proud I. Proud I se musí izotropně rozdělit do všech směrů v rovině, protože úloha je úhlově symetrická. Předpokládejme, že rovina je někde na konci symetricky válcově uzemněná, takže proud má kam odtékat. Jiný kontakt s vodičem zatím neuvažujme. Proud teče do nekonečna, takže jeho proudová plošná hustota se musí se vzdáleností od středu snižovat. Zároveň se tento proud nesmí nikde ztrácet, takže když vezmeme, kolik proudu proteče přes myšlenou kružnici o poloměru r se středem v počátku, tak musí platit

$$2\pi r j_\mathrm{s}(r) = I\,.$$

My ale musíme pracovat s vektory. V předchozí rovnici $j_\mathrm{s}(r)$ je velikost povrchové proudové hustoty ve vzdálenosti r od středu, a tento vztah platí pouze díky tomu, že vektor proudové hustoty je kolmý k hranicím myšlené kružnice. Když známe velikost a směr tohoto vektoru, můžeme napsat jeho složky

$$j_{\mathrm{s},x} = \frac{I}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\,,\quad j_{\mathrm{s},y} = \frac{I}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Takto vypadá proudová hustota, kterou vytváří proud I, jenž teče do plochy v počátku souřadnic. Nyní využijme principu superpozice a přičtěme proud, který odtéká v bodě $[a,0]$. Bude mít stejné vyjádření, jen s opačným znaménkem (protože odtéká), a zaměníme x na $x-a$. Jeho složky jsou

$$j_{\mathrm{s},x} = -\frac{I}{2\pi}\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\,,\quad j_{\mathrm{s},y} = -\frac{I}{2\pi}\frac{y}{(x-a)^2+y^2}\,.$$

Dále značme složky přitékajícího proudu horním indexem *in* a odtékajícího indexem *out*. Povrchová proudová hustota v závislosti na souřadnici na rovině pak je

$$\mathbf{j}_\mathrm{s} = \mathbf{j}_\mathrm{s}^{in} + \mathbf{j}_\mathrm{s}^{out} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x-a)^2+y^2}\right).$$

Našli jsme proudovou hustotu všude v rovině. Nyní pomocí první rovnice můžeme vyjádřit i intenzitu elektrického pole. Napětí mezi napěťovými vodiči je pak dáno jako

$$\int_{[0,a]}^{[a,a]} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}\,,$$

kde $\mathrm{d}\mathbf{l}$ je tečný vektor ke křivce spojující tyto dva body. Jako křivku spojující tyto dva body zvolíme úsečku. Kvůli skalárnímu součinu v integrálu už se nebudeme muset zabývat y-ovou složkou elektrikého pole, protože ta je kolmá na směr této přímky. Za y do integrálu budeme moct dosadit $y = a$, protože to je y-ová souřadnice všech bodů na uvažované úsečce. Integrujeme jen přes x-ovou souřadnici, a to od 0 do a. Dostáváme

$$U = \frac{I}{2\pi\sigma_\mathrm{s}} \int_0^a \left(\frac{x}{x^2 + a^2} - \frac{x - a}{(x-a)^2 + a^2} \right) \mathrm{d}x\,.$$

Pomocí substituce $u = x^2 + a^2, \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ spočítejme první člen v integrálu

$$\int_0^a \frac{x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \int_{a^2}^{2a^2} \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2a^2}{a^2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Druhý člen v integrálu ani nemusíme počítat, ze symetrie úlohy víme, že musí vyjít stejně, jen s opačným znaménkem. Dostáváme tedy závislost napětí na proudu I jako

$$U = \frac{I}{2\pi\sigma_\mathrm{s}} \left(\frac{1}{2}\ln 2 - \left(-\frac{1}{2}\ln 2 \right) \right) = \frac{\ln 2}{2\pi} \frac{I}{\sigma_\mathrm{s}}\,,$$

odkud již jednoduchou úpravou vyjádříme hledanou povrchovou vodivost

$$\sigma_\mathrm{s} = \frac{\ln 2}{2\pi} \frac{I}{U} \doteq 0{,}110\,3 \frac{I}{U}\,.$$

Při řešení jsme zavedli znaménkovou konvenci tak, že proud i napětí považujeme za kladné. V zadání toto není uvedené, takže ideální by bylo uvést I a U v absolutní hodnotě, abychom měli jistotu, že vodivost bude kladné číslo. Pro správnou odpověď toto ale nepovažujeme za nutné.

Jaroslav Herman
`jardah@fykos.cz`

Úloha GG ... válec à la raketa

Mějme dutý válec o poloměru podstavy $r = 3{,}00\,\mathrm{cm}$ *a výšce* $H = 30{,}0\,\mathrm{cm}$*, který je do poloviny naplněn vodou. Válec bez vody váží* $M = 200\,\mathrm{g}$ *a stojí na podložce (jeho podstava je vodorovně), po které se může pohybovat bez tření. Těsně nad podstavou válce je malý otvor o průměru* $r_0 = 0{,}500\,\mathrm{mm}$*, ze kterého vytéká voda kolmo na stěnu válce. Jakou rychlost bude mít válec poté, co vyteče všechna voda? Předpokládejte, že zrychlení válce je dostatečně malé, takže výtoková rychlost bude dána Torricelliho vztahem.* *Radovi utekla ranní káva.*

Vzhledem k tomu, že je otvor ve stěně nádoby malý v porovnání s povrchem hladiny a že můžeme zanedbat setrvačnou sílu působící na vodu, je výtoková rychlost u popsána Torricelliho vztahem

$$u = \sqrt{2gh}\,,$$

kde h značí výšku hladiny kapaliny v nádobě. Nyní označme hmotnost válce M a m hmotnost vody, která zbývá v daném okamžiku ve válci. Dále uvažujme, že se válec v tento moment pohybuje rychlostí v, potom ze zákona zachování hybnosti máme

$$(M+m)\vec{v} = (M+m-\Delta m)(\vec{v}+\mathrm{d}\vec{v}) + \Delta m(\vec{u}+\vec{v})\,.$$

Zkrácením a zanedbáním členu $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\vec{v}$ dostaneme

$$0 = (M+m)\,\mathrm{d}\vec{v} + \Delta m\vec{u}\,.$$

Protože $\vec{u}$ a $\mathrm{d}\vec{v}$ mají opačný směr, můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$(M+m)\,\mathrm{d}v = \Delta m u\,.$$

Nyní si ještě uvědomíme, že Δm značí hmotnost vyteklé vody, budeme tedy uvažovat záporné znaménko při přičítání ke hmotnosti vody v nádobě m. Bude proto platit $\Delta m = -\,\mathrm{d}m$.

$$\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}m}{M+m}u$$

Dále si ještě musíme vyjádřit u v závislosti na m. Vyjádříme si tedy h jako funkci m a dosadíme do Torricelliho vztahu

$$h = \frac{m}{\rho S}\,,$$

kde S je povrch hladiny a ρ je hustota vody. Dosazením dostáváme

$$u = \sqrt{2g\frac{m}{\rho S}}\,.$$

A tedy

$$\mathrm{d}v = -\sqrt{\frac{2g}{\rho S}}\frac{\sqrt{m}}{M+m}\,\mathrm{d}m\,.$$

Integrací dostaneme

$$v_{\max} = -\sqrt{\frac{2g}{\rho S}}\int_{m_0}^{0}\frac{\sqrt{m}}{M+m}\,\mathrm{d}m\,.$$

Integrál na pravé straně řešíme substitucí za $\sqrt{m}$

$$\int\frac{\sqrt{m}}{M+m}\,\mathrm{d}m = 2\int\frac{t^2}{M+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int\mathrm{d}t - 2\int\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}t\right)^2+1}\,\mathrm{d}t = 2t - 2\sqrt{M}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}t\right).$$

Za t dosadíme $\sqrt{m}$ a dostáváme řešení

$$v_{\max} = -2\sqrt{\frac{2g}{\rho S}}\left[\sqrt{m} - \sqrt{M}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{m}{M}}\right)\right]_{m_0}^{0}\,,$$

$$v_{\max} = 2\sqrt{\frac{2g}{\rho S}}\left(\sqrt{m_0} - \sqrt{M}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{m_0}{M}}\right)\right)\,,$$

kde m_0 je původní hmotnost vody ve válci. Vyjádřením S a m_0 pomocí zadaných veličin dostaneme

$$
\begin{aligned}
S &= \pi r^2\,,\\
m_0 &= \frac{H}{2}\pi r^2 \rho\,,\\
v_{\max} &= 2\sqrt{\frac{2g}{\rho\pi r^2}}\left(\sqrt{\frac{H}{2}\rho\pi r^2} - \sqrt{M}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\frac{H}{2}\rho\pi r^2}{M}}\right)\right)\,,\\
v_{\max} &\doteq 1{,}15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.
\end{aligned}
$$

Maximální rychlost, které válec dosáhne, je tedy $1{,}15\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Radovan Lev
`radovan.lev@fykos.cz`

Úloha GH ... neposedný dipólek

Magnetický dipólek o magnetickém momentu $m = 1{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{A{\cdot}m^2}$ harmonicky kmitá na ose vodivé kruhové smyčky o poloměru $R = 1{,}0\,\mathrm{m}$ s frekvencí $f = 1{,}0\,\mathrm{MHz}$ a amplitudou výchylky $h_0 = 1{,}0\,\mathrm{mm}$. Směr magnetického momentu je rovnoběžný s osou smyčky a střední poloha dipólku se nachází v jejím geometrickém středu (tedy dipólek vykmitne vždy do maximální vzdálenosti h_0 pod a h_0 nad smyčku). Určete amplitudu indukovaného napětí ve smyčce, jestliže je dipólek dostatečně malý, a tedy jím vytvářený vektorový potenciál lze vyjádřit jako

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}\,,$$

kde $\mathbf{r}$ je vektor směřující z dipólku do libovolného bodu prostoru, $r = |\mathbf{r}|$ a μ_0 je permeabilita vakua. Připomeňme, že pro magnetickou indukci platí $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. *Kuba má rád dipólky.*

Spočtěme magnetický indukční tok Φ generovaný dipólkem uvnitř smyčky. Ze vztahu pro magnetickou indukci v zadání a ze Stokesovy integrální věty dostáváme

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial S}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\,.$$

Nechť se střední poloha dipólku nachází v počátku kartézské soustavy souřadnic a magnetický moment směřuje v kladném směru osy z. Potom

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{h}\,,$$

kde $\mathbf{R}$ je vektor směřující od středu smyčky do bodu na smyčce a $\mathbf{h}$ je vektor směřující od dipólku ke středu smyčky. Počítejme

$$\Phi = \oint_{\partial S}\mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\oint_{\partial S}\mathbf{m}\times(\mathbf{R}+\mathbf{h})\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\,.$$

Celkovou vzdálenost r dipólku od bodu na smyčce jsme vytkli před integrál, neboť je pro všechny body smyčky stejná. Dále, jelikož $\mathbf{m}\perp\mathbf{R}$ a $\mathbf{m}\parallel\mathbf{h}$, dostáváme

$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\oint_{\partial S} mR\,\mathrm{d}l = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}2\pi R m R = \frac{\mu_0 m R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 m R^2}{2\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\,.$$

Nyní uvažme časovou závislost

$$h = h_0 \cos(\omega t)\,.$$

Pro indukované napětí U tak dostáváme

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,,\\ &= -\frac{\mu_0 m R^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R^2 + h^2\right]^{-3/2}\,,\\ &= \frac{3\mu_0 m R^2}{4}\left[R^2 + h^2\right]^{-5/2} 2h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,,\\ &= -\frac{3\mu_0 m R^2}{2}\left[R^2 + h_0^2\cos^2(\omega t)\right]^{-5/2} h_0^2 \omega \cos\omega t \sin\omega t\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Nyní využijeme vztahů

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\,,\\ \sin(2x) &= 2\sin x\cos x \end{aligned}$$

a rovnici (6) přepíšeme do tvaru

$$U = -\frac{3\mu_0 m R^2}{4}\left[R^2 + \frac{h_0^2}{2} + \frac{h_0^2\cos(2\omega t)}{2}\right]^{-5/2} h_0^2\,\omega\sin(2\omega t)\,. \tag{7}$$

Ze zadání je patrné, že $h_0 \ll R$. Rozviňme tedy výsledek do Taylorova rozvoje pro $\varepsilon = h_0/R$

$$\begin{aligned} U &= -\frac{3\mu_0 m\omega R^2 h_0^2}{4}\left[R^2 + \frac{h_0^2}{2} + \frac{h_0^2\cos(2\omega t)}{2}\right]^{-5/2}\sin(2\omega t)\,,\\ &= -\frac{3\mu_0 m\omega\varepsilon^2}{4R}\left[1 + \varepsilon^2\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\right]^{-5/2}\sin(2\omega t)\,,\\ &= -\frac{3\mu_0 m\omega\varepsilon^2}{4R}\left[1 - \frac{5}{2}\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\right]\sin(2\omega t)\,,\\ &= -\frac{3\mu_0 m\omega\varepsilon^2}{4R}\sin(2\omega t) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\,. \end{aligned}$$

Jelikož h_0 je o tři řády menší než R, dodatečné členy nebudou mít na řešení uvedené (v souladu se zadáním) s přesností na dvě platné číslice vliv.

Pro amplitudu napětí U_0 tak můžeme psát

$$U_0 \approx \frac{3\mu_0 m\omega h_0^2}{4R^3} = \frac{3\pi}{2}\frac{\mu_0 m f h_0^2}{R^3} \doteq 5{,}9\,\mathrm{mV}\,.$$

Jakub Koňárek
jakub.konarek@fykos.cz

FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: https://fykos.cz
e-mail: fykos@fykos.cz

/FYKOS ***@fykosak***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Organizátoři	FYKOS, matfyz, MŠMT
Generální partner	SKUPINA ČEZ
Platinový partneři	Neuron – Nadace na podporu vědy, Qminers
Stříbrní partneři	Karáskovy limonády a sirupy, CASIO, WOLFRAM
Partneři	HUMUSOFT, MathWorks®, VIDA! science centrum, Escape point, Petr Hobža Snack Group, Efektivní altruismus, Prometheus®, Bohemia Garnet
Mediální partner	Česká televize
Za podpory	FABRIC