Řešení úloh 3. ročníku FYKOSího Fyziklání

1. *šotouš*

Pozorovatel vlaků Tomáš měl přiložené ucho na kolejnici a poslouchal. Ve vzdálenosti 1,1 km *od něj si z něj někdo vystřelil a udeřil do kolejí kladívkem. V kolejnici byl zvuk slyšet o tři sekundy dřív než ve vzduchu. Jaká je tedy rychlost zvuku v kolejnici? Rychlost zvuku ve vzduchu je* $c_1 = 330\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Nejdřív vypočítáme dobu, za kterou zvuk urazí vzdálenost s v kolejnici.

$$s = c_2 t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{s}{c_2}\,.$$

Víme, že ve vzduchu to zvuku trvalo o Δt déle, tedy opět počítáme dráhu, kterou zvuk urazil

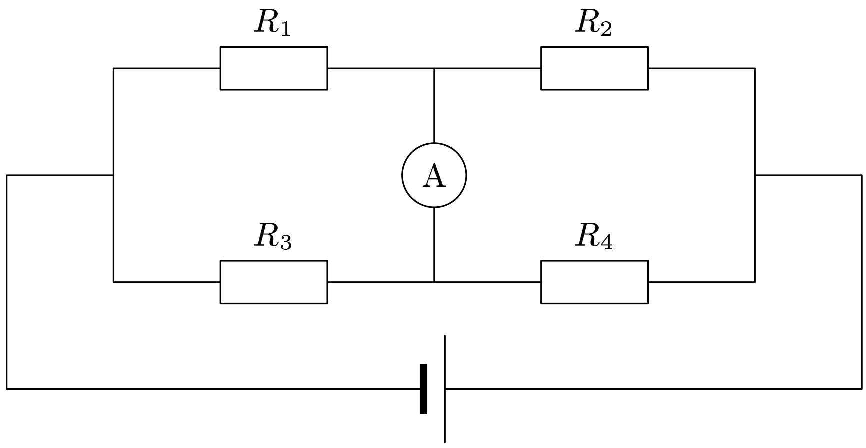
$$s = c_1 t_1 = c_1(t_2 + \Delta t) = c_1\left(\frac{s}{c_2} + \Delta t\right)\,.$$

Z toho již není problém určit c_2 jako

$$c_2 = \frac{s c_1}{s - \Delta t c_1} = 3300\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2. *Muzeum, Florenc*

Vypočtěte, za jakých podmínek nebude ampérmetrem procházet žádný proud.



Pokud ampérmetrem neprochází žádný proud, můžeme prostředky spojit (mají stejný potenciál), takže dostaneme ekvivalentní zapojení – sérii dvou paralelně zapojených obvodů. Tím jsme úlohu vlastně vyřešili; stačí si uvědomit, že podmínka neprotékání středem je splněna, pouze pokud se proud do pravé části rozdělí ve stejném poměru, v jakém vtekl do střední části zleva. Proud v každé z větví je však nepřímo úměrný odporu, takže

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}\,.$$

3. *výtok*

Válcová nádoba s velkým průměrem stojí na vodorovné podložce. Ve svislé stěně nádoby jsou nad sebou dva kruhové otvory s průměrem $d = 10\,\mathrm{mm}$, ve výškách $h_1 = 10\,\mathrm{cm}$ a $h_2 = 15\,\mathrm{cm}$ nad podložkou. Jaký musí být objemový průtok v přívodním potrubí, aby se hladina v nádobě ustálila v takové výšce, že proudy vody z obou děr dopadají do stejného místa na podložce. Použijte $g = 10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Podle známého vzorce spočítáme rychlost výtoku z jednotlivých otvorů, $v = \sqrt{2gx}$, kde x je výška vody nad otvorem. Tedy v našem případě

$$v_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1 + x)}\,,$$
$$v_2 = \sqrt{2gx}\,.$$

Uvažujeme ovšem, že velikost otvoru nemá vliv na rychlost vody z něj proudící a následný proces je vodorovný vrh. Pro ten platí vztah pro délku vrhu

$$l = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

kde v je pčáteční rychlost a h výška vrhu. Chceme, aby oba proudy vody dopadaly na stejné místo, tedy $l_1 = l_2$.

$$\sqrt{2gx}\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \sqrt{2g(h_2 - h_1 + x)}\sqrt{\frac{2h_1}{g}}\,.$$

Řešením této rovnice je $x = h_1$. Objemový průtok $Q_V = Sv$ vypočteme jako součet průtoků z jednotlivých otvorů.

$$Q_V = \frac{\pi d^2}{4}v_1 + \frac{\pi d^2}{4}v_2 = \frac{\pi d^2}{4}\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}\right)\,.$$

Pro zadané údaje je $Q_V = 0{,}247 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$.

4. *slunce žblunce*

Hustota výkonu slunečního záření dopadajícího na zemskou atmosféru je přibližně $\varrho = 1{,}4\,\mathrm{kW/m^2}$. Jestliže všechna energie vzniká na Slunci při přeměně deuteria a tricia na hélium, kolik tun jich Slunce spaluje za sekundu? Zanedbejte část energie odnášenou neutriny. Použijte tyto konstanty: $m_\mathrm{n} = 1{,}675 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $m_\mathrm{p} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $m_\mathrm{u} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $M_\mathrm{He} = 4{,}003\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, $1\,\mathrm{AU} = 150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$.

Celkový výkon Slunce spočítáme vynásobením hustoty výkonu u Země plochou koule o poloměru $1AU$.

$$P = 4\pi R^2 \varrho\,.$$

Víme, že pro výkon platí vztah $P = W/t$. Pokud je výkon konstantní, bude vykonaná práce $W = Pt$. V tomto případě je vykonaná práce úměrná hmotnostnímu schodku při fúzi vodíku na helium. Využijeme ekvivalence hmoty a energie $W = E = mc^2$. Tedy celkový hmotnostní schodek bude

$$\Delta m_c = \frac{Pt}{c^2} = \frac{4\pi R^2 \varrho t}{c^2}$$

Reakce probíhající při fúzi je ${}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n}$. Hmotnostní schodek tedy umíme zapsat jako rozdíl hmotností na levé a pravé straně rovnice

$$\Delta m = 3m_\mathrm{n} + 2m_\mathrm{p} - M_\mathrm{He} m_\mathrm{u} - m_\mathrm{n} \approx 4{,}7 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}\,.$$

Tedy, porovnáme-li jej s hmotností reaktantů (m_in), zjistíme, kolik procent vstupující hmotnosti se přemění na energii.

$$q = \frac{\Delta m}{m_\mathrm{in}} = 1 - \frac{M_\mathrm{He} m_\mathrm{u} + m_\mathrm{n}}{3m_\mathrm{n} + 2m_\mathrm{p}}\,.$$

Celkovou hmotnost izotopů vodíku spočítáme z celkového hmotnostního schodku pomocí vypočítaného koeficientu q.

$$m_\mathrm{in} = \frac{\Delta m_c}{q} = \frac{4\pi R^2 \varrho t}{c^2 \left(1 - \dfrac{M_{He} m_u + m_n}{3m_n + 2m_p}\right)} = 7{,}88 \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg} = 7{,}88 \cdot 10^{8}\,\mathrm{t}\,.$$

5. *krychlová káča*

Vypočtěte moment setrvačnosti krychle hmotnosti M a strany délky a okolo tělesové úhlopříčky.

Pokud víme, že moment setrvačnosti krychle kolem libovolné osy procházející středem je stejný, a pamatujeme si nebo spočítáme moment setrvačnosti čtverce, můžeme rovnou psát výsledek.

Pokud ne, můžeme důvtipně použít Steinerovy věty. Rozdělíme si krychli na osm krychliček. Moment setrvačnosti závisí na hmotnosti a druhé mocnině rozměru, při stejné hustotě tedy celkově na páté mocnině rozměru. Pokud hledaný moment je I, potom momenty malých krychliček jsou $I/32$. U dvou z nich prochází rotační osa přímo středem. Z různých řezů velké krychle potom jednoduše zjistíme a spočítáme, že zbylých šest má střed od osy vzdálený $\sqrt{2/3}\,a/2$. Tedy platí, že

$$I = 2 \cdot \frac{1}{32} I + 6 \cdot \left(\frac{1}{32} I + \frac{M}{8} \left(\frac{a}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 \right) = \frac{Ma^2}{6}\,.$$

z čehož už snadno vyjádříme kýžený výsledek.

6. *Matoušova stíhačka*

Matouš se po úspěšném absolvování MFF UK stal pilotem rakouské armády. Právě pilotuje letoun, jehož rychlost je o čtvrtinu větší než rychlost zvuku. Při Matoušově přeletu nad Temelínem si jeden ze zaměstnanců všiml, že uslyšel rázovou vlnu přesně půl minuty poté, co Matouš přelétal právě nad jeho hlavou. V jaké výšce Matouš letěl? Rychlost zvuku ve vzduchu uvažujte $330\,\mathrm{m/s}$

Máme letadlo letící rychlostí větší než je rychlost zvuku ve vzduchu. V tom případě existuje za letadlem pomyslný kužel, přičemž vně tohoto kužele nemáme šanci letadlo slyšet, protože k nám prostě zvuk zatím nemohl dorazit. Letadlo za sebou jakoby tento kužel stále táhne a jakmile se kužel protne s našima ušima, uslyšíme hlasitý burácivý zvuk. (Srovnejte s trojúhelníkem na vodní hladině, který za sebou táhne rychle jedoucí člun.)

Polovinu vrcholového úhlu kužele označme ϑ. Úhel ϑ je dán vztahem $\sin\vartheta = c/v_l$, kde c je rychlost zvuku. Půlminutovou prodlevu ze zadání označme písmenem T. Výška letadla nad zemí je pak

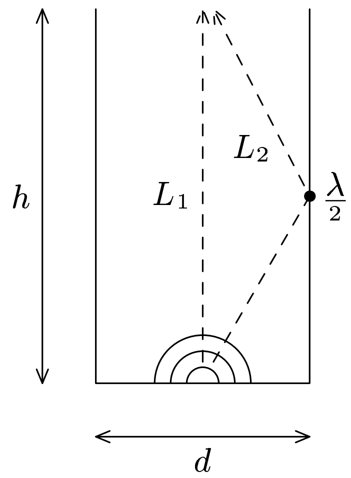
$$h = \operatorname{tg}\vartheta v_l T = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{1-\sin^2\vartheta}} v_l T\,.$$

Dosazením $\sin\vartheta = c/v_l = 4/5$ a dostáváme výšku letadla $h = 16{,}5\,\mathrm{km}$.

7. *studna*

Do hluboké studny o průměru $d = 2\,\mathrm{m}$ spadla zahradnická konev a při nárazu o betonové dno přesně uprostřed vydala zvuk o frekvenci $f = 1260\,\mathrm{Hz}$. Přesto na úrovni země přímo nad dopadem nebylo téměř nic slyšet. Jak je studna hluboká (najděte největší konečnou možnou hloubku)? Rychlost zvuku berte v tomto počasí $c_0 = 330\,\mathrm{m/s}$.

Zvuk přicházející zprostřed dna studny jde jednak přímo nahoru a jednak se odráží od okolních stěn (viz obr.). Obě vlny nahoře interferují a pokud je jejich dráhový rozdíl poločíselný násobek vlnové délky, bude zvuk velmi slabý. Dráhový rozdíl činí



$$\Delta L = L_2 - \frac{\lambda}{2} - L_1 = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} - \frac{\lambda}{2} - h\,,$$

kde člen s vlnovou délkou vyjadřuje obrácení fáze při odrazu na stěně studny. Při maximální hloubce studny je dráhový rozdíl minimální, tedy $\Delta L = \frac{\lambda}{2}$. Řešíme proto rovnici

$$\sqrt{d^2 + h^2} - h = \lambda\,.$$

Vyjde

$$h = \frac{d^2 - \lambda^2}{2\lambda}\,,$$

kde $\lambda = c_0/f$. Proto $h \doteq 7{,}5\,\mathrm{m}$.

8. *Špunťa a ovar*

Pes jménem Špunťa sedí na loďce, která je na jezeře. Pes se nachází ve vzdálenosti $10\,\mathrm{m}$ od břehu jezera a cítí lákavou vůni ovaru, která přichází od břehu. Prudce vyrazí a popoběhne vůči loďce 3 metry dopředu směrem ke břehu, ale koupat se mu nechce, takže se na konci loďky prudce zastaví. Jak daleko od břehu jezera je nyní Špunťa? Psík váží $5\,\mathrm{kg}$ a loďka $30\,\mathrm{kg}$, odpor, který voda klade loďce, si dovolte velkoryse zanedbat. Výsledek zaokrouhlete na centimetry.

Označme $x_\mathrm{p}, x'_\mathrm{p}$ starou a novou polohu psa vůči břehu, $x_\mathrm{l}, x'_\mathrm{l}$ starou a novou polohu loďky vůči břehu. Dále označme x změnu polohy psa vůči břehu a y změnu polohy loďky vůči břehu, $m_\mathrm{l}, m_\mathrm{p}$ jsou postupně hmotnosti loďky a psa.

Když zanedbáme odpor vody, na systém pes + loďka nepůsobí žádná vnější síla a poloha těžiště tohoto systému se zachovává. To vyjádříme rovnicí

$$m_\mathrm{p} x + m_\mathrm{l} y = 0\,.$$

Zároveň víme, že pes se posunul vůči loďce o vzdálenost $a = -3\,\mathrm{m}$ (minus proto, že se přiblížil směrem ke břehu, který je pro nás počátek). Odtud máme rovnici

$$x - y = a\,.$$

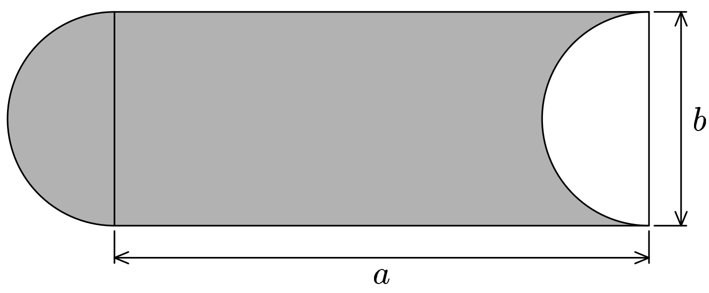
Vyjádřením y z druhé rovnice a dosazením do první dostáváme

$$x = a\frac{m_l}{m_l + m_p}\,,$$

což pro zadané hodnoty dává posunutí psa směrem ke břehu 2,57 m. Špunťa tedy skončí 7,43 m od břehu.

9. *torpédo*

Vypočtěte polohu těžiště vybarvené části následujícího dvojrozměrného homogenního útvaru s hustotou ϱ.



Doplníme-li útvar do výřezu vpravo odpovídajícím kruhem (o průměru b a stejné hustotě ϱ), dostaneme středově souměrný útvar, jehož těžiště splývá se středem obdélníka. Nechť x jest vodorovná poloha těžiště vybarveného útvaru (měřeno od středu obdélníka); plocha vybarveného útvaru je zjevně rovna ploše vyznačeného obdélníka, totiž ab. Vodorovná poloha těžiště doplněného kruhu je $a/2$, plocha kruhu $\pi b^2/4$. Poloha těžišť je pak tedy svázána vztahem

$$x \cdot ab + \frac{a}{2} \cdot \frac{\pi b^2}{4} = 0\,,$$

z čehož okamžitě plyne $x = -\pi b/8$. Svislá poloha těžiště zůstává vzhledem k osové symetrii uprostřed.

10. *ohříváme si čajíček*

Čaj v kvalitní laboratorní termosce chladne při určité okolní teplotě tempem $0{,}1\,^\circ\mathrm{C}$ *za čtvrt hodiny. Kolikrát za minutu je potřeba poloplnou termosku rychle překlopit vzhůru nohama, aby se chladnutí zamezilo? Výška vnitřní válcové nádoby je* $h = 30\,\mathrm{cm}$.

Pokud termosku rychle převrátíme vzhůru nohama, tekutina držená odstředivou silou bude vynesená nahoru a spadne. Pokud zabírá polovinu objemu, propadne se průměrně o polovinu výšky. Tedy potenciální energie $\Delta E = mgh/2$ se převede na tepelnou energii $\Delta Q = cm\Delta T$. Pokud N-krát provedeme tento manévr, bude mít rovnováha tvar

$$Nmg\frac{h}{2} = mc\Delta T \Rightarrow N = \frac{2c\Delta T}{gh}\,.$$

Pro $\Delta T = 0{,}1\,^\circ\mathrm{C}/15\,\mathrm{min}$ a $c = 4200\,\mathrm{J/kg{\cdot}K}$ je tak

$$N \doteq 19\,\mathrm{min}^{-1}\,.$$

Termosku stačí během minuty devatenáctkrát otočit vzhůru nohama.

11. *závaží na niti*

Představme si, že jedeme ve vagonu, který se pohybuje po vodorovné rovině, rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. *Ke stropu vagonu zavěsíme vlákno a na něj* $2{,}5\,\mathrm{kg}$ *těžké závaží. Určete úhel, o který se závaží odkloní od svislého směru. Budeme předpokládat, že při pohybu vagonu je těleso vzhledem k vagonu v klidu.*

Jedná se o využití druhého Newtonova zákona. Na závaží působí síla $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ve směru proti pohybu vagonu a zároveň tíhová síla $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$, kolmá na vodorovný povrch. Tyto dvě síly jsou na sebe kolmé a tvoří odvěsny pravoúhlého trojúhelníka. Ke zjištění úhlu tedy můžeme použít goniometrických funkcí, konkrétně funkce tangens. Odtud přímo můžeme napsat

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{ma}{mg}\,,$$

což po vykrácení dá

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{a}{g}\,.$$

S pomocí kalkulačky či tabulek pak snadno zjistíme $\varphi = 26{,}56^\circ$

12. *veslařská*

Jak přibližně závisí rychlost veslice na počtu veslařů N *(obvyklé jsou dvoj-, čtyř- a osmiveslice), pokud předpokládáte, že každý veslař má stejný výkon, a tvar lodi (odporový koeficient* C*) nezávisí na* N. *Kdo vyhraje v závodě čtyřveslice proti osmiveslici?*

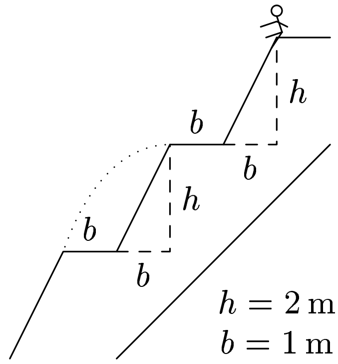
Při pohybu rychlostí v se výkon veslařů NP_0 spotřebuje na výkon odporové síly

$$P = Fv = \tfrac{1}{2}C\varrho Sv^3\,.$$

Uvažme, že průřez závisí na objemu vytlačené vody vztahem $S^3 \sim V^2$. Objem vytlačné vody je však přímo úměrný N, odtud $S \sim N^{2/3}$. Dosazením do rovnosti výkonů $v \sim N^{1/9}$. Protože odmocnina je rostoucí funkce, vyhraje v závodě osmiveslice.

13. *bláznivá Jíťa*

Bláznivá Jíťa se klouže po namrzlé Hladové zdi, jejíž profil je na obrázku. Jaký minimální součinitel smykového tření musí být mezi ní a povrchem, jestliže začíná klouzat z klidu, aby další schod nepřeletěla (tečkovaně) a neublížila si?



Nejprve určíme, jakou maximální rychlost může Jíťa mít v okamžiku, kdy je na následující hraně. Jedná se o vodorovný vrh v tíhovém poli. Za čas $t = \sqrt{2h/g}$, který uplyne před dopadem na plošinu pod schodem, smí uletět vodorovně nanejvýš $l = 2b$, tedy

$$v_{\max} = 2b\sqrt{\frac{g}{2h}}\,.$$

Nyní vyjádříme rychlost pomocí součinitele smykového tření f. Ze zákona zachování energie plyne, že

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + W_f\,,$$

kde W_f je práce vykonaná třecími silami a je rovna $W_f = mgf \cdot 2b$. Tedy

$$gh - \frac{v_{\max}^2}{2} = 2bgf_{\min} \Rightarrow f_{\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{b} - \frac{b}{h}\right)\,.$$

Dosadíme-li hodnoty ze zadání a obrázku, vyjde $f_{\min} = 0{,}75$.

14. *SpaceShip One*

Pasažéři komerční vesmírné lodi společnosti Virgin pociťují gravitační sílu Země stokrát menší než na povrchu. Pod jakým prostorovým úhlem Ω vidí Zemi?

Na povrchu je gravitační síla Země úměrná $1/R^2$, ve vzdálenosti aR je úměrná $1/(aR)^2$, protože je v této vzdálenosti gravitační síla stokrát menší, musí být

$$a = \sqrt{100} = 10\,.$$

Okraj Země a loď s pasažéry tvoří kužel o poloměru R, výšce aR a vrcholovým úhlem 2α. Úhel α získáme z rovnosti

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{aR} = \frac{1}{a}\,.$$

Prostorový úhel se určí ze vztahu

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \cos\alpha\right)\,.$$

Využitím trigonometrických identit lze vyjádřit

$$\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right) \doteq 0{,}032\,.$$

15. *křižovatka*

Máme dvě silnice svírající obecný úhel α a na každé z nich auto ve vzdálenostech s_1 a s_2 od křižvatky. Obě auta jedou směrem ke křižovatce, první rychlostí v_1, druhé rychlostí v_2. Kdy budou k sobě nejblíže?

Z kosinové věty máme pro vzdálenost aut rovnici

$$d^2 = (s_1 - v_1 t)^2 + (s_2 - v_2 t)^2 - 2(s_1 - v_1 t)(s_2 - v_2 t)\cos\alpha\,.$$

Po roznásobení a úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} d^2 = {} & \left(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha\right) t^2 - 2\left(s_1 v_1 + s_2 v_2 - (v_1 s_2 + v_2 s_1)\cos\alpha\right) t + \\ & + \left(s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos\alpha\right)\,, \end{aligned}$$

což je kvadratická závislost. Ze situace je jasné, že hledáme minimum této funkce. Z hodin matematiky víme, že minimum paraboly $ax^2 + bx + c$ nastává v bodě $x = -b/2a$ a ihned tedy můžeme psát konečný výsledek.

16. *podvodní relativita*

Světlo vstupuje (rychlostí c) do potoka, který teče relativistickou rychlostí v rovnoběžně se směrem paprsku světla, potok i světlo proudí na stejnou stranu. Jaká bude rychlost světelné vlny pod vodou z pohledu vnějšího pozorovatele?

Ve vztažné soustavě, kde je potok v klidu (neteče), se šíří světlo potokem rychlostí c/n. V soustavě, jež se vůči této pohybuje rychlostí v (proti směru šíření světla), dostáváme ze známého vztahu pro relativistické skládání rychlostí rychlost $(c/n + v)/(1 + v/cn)$.

17. *liga mistrů*

Jakou rychlostí musí brankář vykopnout míč, aby přihrál útočníkovi vzdálenému 75 m?

Jedná se vlastně o šikmý vrh. Nechť je míč vykopnut v souřadnicích $x = y = 0$ pod úhlem α s počáteční rychlostí v. Vyjádříme-li polohu míče v závislosti na čase, dostaneme $x = vt\cos\alpha$, $y = vt\sin\alpha - gt^2/2$. Dosadíme-li čas vyjádřený z první rovnice do rovnice druhé a položíme-li $y = 0$ (míč dopadl), dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{xg}{2\sin\alpha\cos\alpha}}\,,$$

přičemž výraz $\sin\alpha\cos\alpha$ nabývá maxima pro $\alpha = \pi/4$, kdy $\sin\alpha\cos\alpha = 1/2$, tudíž je třeba vykopnout míč rychlostí alespoň $v = \sqrt{xg}$, kde x je vzdálenost dopadu a g tíhové zrychlení.

18. *hrdinný výsadkář*

Po výskoku z letadla se výsadkář Robin krátký čas pohyboval volným pádem a překonal tak výšku $s_1 = 50\,\mathrm{m}$ (dosáhl rychlosti v_1). Poté otevřel padák a rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením $a = 2{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ padal, dokud se jeho rychlost nezmenšila na $v_2 = 5{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Poté touto rychlostí 30 sekund klesal (t_3), dokud nedopadl na zem. Určete výšku, ze které vyskočil, a čas, po který padal. Použijte $g = 10{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Rozdělíme si skok parašutisty do tří částí, v každé z nich budeme zkoumat jeho rychlost na začátku a na konci, jeho zrychlení a čas a dráhu pohybu. Je dobré zmínit, že nás bude zajímat pouze svislá složka rychlosti.

První část skoku je popsána veličinami v_0, s_1, g, v_1 a t_1. Máme zadáno $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ (rychlost na počátku pohybu), s_1 (uraženou dráhu), g (jde o volný pád, tedy zrychlení odpovídá tíhovému). Chceme spočítat v_1 (rychlost na konci této části) a t_1 po který tato část pohybu probíhala. Víme, že

$$s_1 = \tfrac{1}{2}gt_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}}$$

a také

$$v_1 = gt_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gs_1}\,.$$

Ve druhé části máme zadáno zpomalení a a rychlost v_2 na konci skoku. Opět využijeme známé vztahy pro rovnoměrně zpomalený pohyb a dosadíme z minulých výsledků.

$$v_2 = v_1 - at_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{\sqrt{2gs_1} - v_2}{a}$$

$$s_2 = v_1t_2 - \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{2gs_1 - v_2^2}{2a}\,.$$

A poslední čas už je jenom rovnoměrný pohyb.

$$s_3 = v_2t_3\,.$$

Celkový čas i dráhu určíme součtem dílčích výsledků a dosadíme zadané hodnoty.

$$t = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} + \frac{\sqrt{2gs_1} - v_2}{a} + t_3 = 46{,}47\,\mathrm{s}\,,$$

$$s = s_1 + \frac{2gs_1 - v_2^2}{2a_1} + v_2t_3 = 443{,}75\,\mathrm{m}\,.$$

19. *nabitý čtverec*

Představte si čtverec o straně a, v jehož vrcholech jsou umístěny částice nabité na náboj Q. Jaký náboj musí mít částice, kterou umístíme na průsečík úhlopříček čtverce, aby soustava byla v rovnováze? Jaká to bude rovnováha?

Každý z nábojů ve vrcholech čtverce na sebe působí silou $F = Q^2/a^2$. Tedy sečteme-li silové působení od všech nábojů, dojdeme k hodnotě $F = \sqrt{2}\,Q^2/a^2$. Náboj naproti potom působí silou $F = Q^2/2a^2$. Abychom dostali rovnováhu, musíme doprostřed vložit náboj, který bude působit silou

$$F' = -\left(\frac{\sqrt{2}\,Q^2}{a^2} + \frac{Q^2}{2a^2}\right) = \frac{Q}{a^2}\left(-Q\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\right)\,.$$

Odtud už můžeme odvodit výsledek, $Q_? = -Q\left(\sqrt{2} + 1/2\right)/2$.

A co se rovnováhy týče, pokud náboj o kousek vychýlíme, zcela jistě rovnováhu sil zrušíme. Jedná se o labilní rovnováhu.

20. *minimální kyvadlo*

Máme homogenní tyč délky l. Jak daleko od středu tyče je třeba umístit osu otáčení, aby takto vzniklé kyvadlo mělo minimální dobu kyvu?

Umístěme osu otáčení do vzdálenosti $x \in [0, l/2]$ od těžiště. Pro malé kmity platí pohybová rovnice

$$J(x)\ddot{\varphi} = -mgx\varphi\,,$$

kde $J(x)$ je moment setrvačnosti vůči ose vzdálené o x od těžiště. Tato rovnice je formálně podobná pohybové rovnici matematického kyvadla či harmonického oscilátoru.

Pro úhlovou frekvenci potom platí

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{J(x)}}\,.$$

Moment $J(x)$ určíme pomocí Steinerovy věty a ze znalosti momentu setrvačnosti tyče vůči jejímu středu, dostaneme

$$J(x) = \tfrac{1}{12}ml^2 + mx^2\,.$$

Doba kmitu je $T = 2\pi/\omega$, hledat podmínku pro x minimální doby kyvu je stejné jako hledat podmínku pro maximum frekvence ω. Je třeba tedy najít maximum funkce $\omega(x)$, která je daná jako

$$\omega(x) = \sqrt{\frac{mgx}{\frac{1}{12}ml^2 + mx^2}}\,.$$

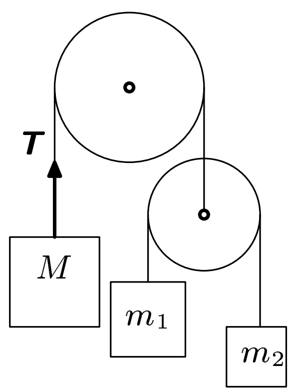
Rozmysleme si ale, že funkce $\omega(x)$ má maximum ve stejném bodě jako funkce $f(x) = x/(a^2 + x^2)$, kde $a^2 = l^2/12$. Hledejme proto maximum funkce $f(x)$. První derivaci $f(x)$ položíme nule a vyřešíme tuto rovnici pro x. Tedy

$$f'(x) = \frac{a^2 - x^2}{(a^2 + x^2)^2} = 0\,.$$

Odtud dostáváme $x = a = l/\sqrt{12}$, což je výsledek. Funkce $f(x)$ je spojitá, $f(0) = 0$ a $f(l/2) = 3/2e$ a $f(x)$ je kladná na kladných číslech, takže bod $x = a$ je jistě maximum a nikoli minimum.

21. *kladkostrojek*

Vypočtěte, jakou silou T je napínáno lanko, když víte, že $m_1 > m_2$ a $M > m_1 + m_2$. Tíhové zrychlení je g, tření, momenty setrvačnosti a hmotnosti kladek zanedbejte.



Z pohybových rovnic máme

$$T - Mg = Ma_M\,,$$

$$V - m_1 g = m_1 a_{m_1}\,,$$

$$V - m_2 g = m_2 a_{m_2}\,,$$

kde V je napětí v druhém vláknu a a jsou příslušná zrychlení. Dále z nutnosti nulové výsledné síly působící na pohyblivou kladku[1] máme

$$T = 2V\,.$$

A konečně z kinematiky je zřejmé, že

$$-a_M = \frac{1}{2}(a_{m_1} + a_{m_2})\,.$$

Dosazením posledních dvou rovnic do prvních tří máme

$$\begin{aligned} T - Mg &= -\frac{M}{2}(a_{m_1} + a_{m_2})\,,\\ \frac{T}{2} - m_1 g &= m_1 a_{m_1}\,,\\ \frac{T}{2} - m_2 g &= m_2 a_{m_2}\,. \end{aligned}$$

Z druhé a třetí rovnice vyjádříme a_{m_1} a a_{m_2}, dosadíme do první a dostaneme

$$T - Mg = -\frac{M}{2}\left(\frac{T}{2m_1} + \frac{T}{2m_2} - 2g\right)\,.$$

Z této rovnice už snadno vyjádříme kýžený výsledek.

22. *duchařina*

Na optickou lavici jsme umístili spojku s ohniskovou vzdáleností f. Na tutéž lavici jsme do vzdálenosti $f/3$ od čočky umístili malý kruhový terčík, který není nijak nakloněný a je na lavici kolmý. Bude jeho obraz patrný na stínítku, popřípadě, bude viditelný?

Do zobrazovací rovnice čočky

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

dosadíme $a = f/3$ a získáme $a' = -f/2$. To představuje zdánlivý obraz, který uvidíme, pokud se do čočky podíváme. Na stínítku bude možná patrný flek, rozhodně však ne obraz.

23. *had na rampě*

Na nakloněné rovině se sklonem α, na jejímž konci je hrana, leží lano délky l a hmotnosti m, jehož malá část o délce a visí přes hranu dolů. Jaký musí být součinitel klidového tření f, aby lano nesjelo z nakloněné roviny?

Ve směru pohybu působí příslušná složka tíhy lana na nakloněné rovině F_1, proti směru pohybu působí tření F_t a tíha F_2 části lana visícího přes hranu. Zajímá nás mezní případ, kdy se síly vyrovnají, tedy

$$F_1 = F_2 + F_t \qquad (1)\,.$$

---

[1] Jinak by měla při nulové hmotnosti nekonečné zrychlení.

Sílu F_1 určíme ze vztahu

$$F_1 = m_1 g \sin\alpha\,,$$

kde m_1 je hmostnost lana na nakolněné rovině. Protože je hmota v laně rozložena rovnoměrně, platí $m_1 = m\,(l-a)\,/l$. Obdobně určíme pro sílu $F_2 = m_2 g$ hmotnost $m_2 = ma/l$. Třecí síla je úměrná součiniteli klidového tření a složce tíhy působící proti podložce

$$F_t = f m_1 g \cos\alpha\,.$$

Tyto vztahy dosadíme do rovnice ??

$$f m g\,(l-a)\cos\alpha = m g\,(l-a)\sin\alpha - m g a$$

a vyjádříme f

$$f = \operatorname{tg}\alpha - \frac{a}{(l-a)\cos\alpha}\,.$$

24. *beranidlo*

Představme si kulové závaží o hmotnosti 0,7 kg*. Zavěsíme jej na lanko o délce* 80 cm *a vychýlíme z rovnovážné polohy tak, že napnuté lanko je vodorovné s povrchem. Na povrchu, v nejnižším bodě své dráhy postavíme závaží do cesty ocelový blok o hmotnosti* 3 kg*. Blok je na počátku v klidu a jedná se o dokonale pružnou srážku. Zjistěte, jaká je rychlost koule i hranolu bezprostředně po srážce.*

Nejprve spočteme rychlost koule v nejnižším bodě dráhy. Zřejmě

$$mgd = \frac{1}{2}mv^2\,, \qquad v = \sqrt{2gd}.$$

Pro dokonale pružnou srážku máme dvě rovnice a sice zachování hybnosti a energie. Tedy

$$m\sqrt{2gd} = mv_m + Mv_M\,,$$
$$mgd = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2\,.$$

Z první rovnice vyjádříme

$$v_m = \sqrt{2gd} - \frac{M}{m}v_M\,,$$

dosadíme do druhé a potom už jednoduchými úpravami dostaneme hledaný výsledek.

25. *přestřižená pružina*

Máme dvě pružiny o tuhostech k_1 a k_2. Když tyto dvě pružiny připojíme za sebe, závaží na nich zavěšené kmitá s frekvencí ω. Nyní pružinu s tuhostí k_1 přestřihneme na polovinu a připojíme za sebe tuto půlku pružiny a původní pružinu tuhosti k_2. S jakou frekvencí ω' bude závaží kmitat teď?

Tuhost k dvou za sebe zapojených pružin o tuhostech k_1, k_2 je dána vztahem

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad\Rightarrow\quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\,.$$

Vztah snadno odvodíme zkoumáním velikosti síly, kterou působí spojené pružiny, v závislosti na jejich celkovém prodloužení. Vztah je analogický například k sériovému zapojení kondenzátorů. Odtud také plyne, že na polovičku zkrácená pružina má dvojnásobnou tuhost.

S použitím těchto poznatků dostáváme pro původní frekvenci ω a novou frekvenci ω' vzorce

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{2k_1 k_2}{m(2k_1 + k_2)}}\,,$$

odkud dostaneme řešení

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)}{2k_1 + k_2}}\,.$$

26. *Joulův cyklus*

Při Joulově cyklu se plyn nejprve adiabaticky rozpíná, poté izobaricky rozpíná, dále adiabaticky stlačuje a nakonec izobaricky stlačuje a dostane se tak do původního stavu. Počáteční tlak označme p_1, tlak při izobarickém rozpínání p_2. Určete účinnost η vratného Joulova cyklu, jehož pracovní látkou je helium, které pro naše účely budeme považovat za ideální plyn (s teplotně nezávislými tepelnými kapacitami). Vyjádřete η jako funkci tlaků p_1, p_2.

Účinnost je definována jako

$$\eta = \frac{W_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = \frac{Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}} = 1 - \frac{Q_{\text{out}}}{Q_{\text{in}}}\,.$$

Víme, že teplo se při adiabatickém ději neprenáší. Při izobarické expanzi plyn přijímá teplo Q_{in} a při izobarické kompresi odevzdává Q_{out}. Počáteční stav značme A, stav po adiabatické epanzi B, po izobarické expanzi C, po adiabatické kompresi D a izobarickou kompresí dosáhneme opět stavu A. Tlaky, objemy a teploty v těchto stavech značme písmeny p, V, T s příslušnými indexy A, B, C, D.

Uvažujme, že pracujeme s jedním molem plynu. Helium je jednoatomový plyn a tedy 1 mol plynu má tepelnou kapacitu při stálém tlaku rovnu $c_{\text{p}} = 5R/2$. Snadno pak určíme

$$Q_{\text{in}} = c_{\text{p}}(T_{\text{C}} - T_{\text{B}})\,,$$

$$Q_{\text{out}} = c_{\text{p}}(T_{\text{D}} - T_{\text{A}})\,.$$

Uvědomme si, že $p_{\text{B}} = p_{\text{C}}$ a $p_{\text{D}} = p_{\text{A}}$. Rovnice adiabaty pro jednoatomový plyn a stavová rovnice pro 1 mol ideálního plynu nám pak dává vztahy

$$p_{\text{A}} V_{\text{A}}^{5/3} = p_{\text{B}} V_{\text{B}}^{5/3}\,,$$

$$p_{\text{B}} V_{\text{C}}^{5/3} = p_{\text{A}} V_{\text{D}}^{5/3}\,,$$

$$pV = RT\,.$$

Nyní již můžeme postupně psát

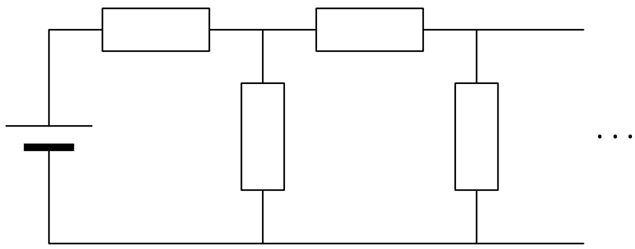
$$\eta = 1 - \frac{T_\mathrm{C} - T_\mathrm{B}}{T_\mathrm{D} - T_\mathrm{A}} = 1 - \frac{p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}} \left(\frac{V_\mathrm{C} - V_\mathrm{B}}{V_\mathrm{D} - V_\mathrm{A}} \right) = 1 - \frac{p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}} \left(\frac{V_\mathrm{C} - \left(\frac{p_\mathrm{A}}{p_\mathrm{B}}\right)^{3/5} V_\mathrm{A}}{\left(\frac{p_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}}\right)^{3/5} V_\mathrm{C} - V_\mathrm{A}} \right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{P_\mathrm{B}}{p_\mathrm{A}} \right)^{2/5} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/5},$$

což je již náš kýžený výsledek. Primitivní kontrolou správnosti výsledku budiž zjištění, že η se skutečně pohybuje v intervalu mezi 0 a 1.

27. *fronta na maso*

Určete celkový odpor nekonečné odporové řady, která je napájena zdrojem U. Všechny odpory mají stejnou velikost R.



Nezařadíme-li hned do celé řady všechny odpory, co jich má obsahovat, ale začneme-li řadit odpory postupně a počítat celkový odpor zapojení, získáme číselnou posloupnost celkového odporu v závislosti na počtu zařazených odporových částí n. Pokud zjistíme, jak vypadá obecně předpis pro n-tý člen takovéto řady, můžeme zjistit, zda tato řada konverguje a při troše štěstí také zjistíme, k jaké hodnotě konverguje. To je námi hledaná hodnota odporu nekonečné řady.

Pro $n = 1$ je celkový odpor roven $R_1 = 2R$. V dalších výpočtech budeme již mít některé odpory řazeny paralelně. Pro zjednodušení zápisu výpočtu budeme dál používat zápis pro paralelní řazení odporů pomocí značky $\|$. Platí

$$R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

Pro $n = 2$ si zkusíme výpočet ještě trochu přiblížit, pro další členy už bude výpočet obdobný. Oba odpory z druhé části jsou vzájemně sériově a jako celek jsou paralelně k odporu v první části. K nim je v sérii zbývající odpor z první části. Celkový odpor je tedy

$$R_2 = R + R \| (R + R) = R + \frac{R \cdot (R + R)}{R + (R + R)} = R + \frac{2R^2}{3R} = \frac{5}{3} R\,.$$

Je-li $n = 3$, pak je odpor roven

$$R_3 = R + R \| \left(R + R \| (R + R)\right) = R + R \| \frac{5}{3} R = \frac{13}{8} R\,.$$

Pokud se podíváme pozorně, uvidíme, že ve předchozím výpočtu je obsažen i výpočet pro člen $n = 2$. Podíváme-li se na schéma zapojení, pak se pro každé n bude vždy ve výpočtu vyskytovat i hodnota odporu pro $n - 1$. Dá se tedy napsat, že

$$R_n = R + R \| R_{n-1}\,.$$

Tohoto vztahu můžeme využít pro rychlejší výpočet pro libovolného n-tého členu řady. Určíme si ještě tedy další hodnotu pro $n = 4$

$$R_4 = R + R \| R_3 = \frac{34}{21} R \,.$$

Napišme si nyní všechny vypočtené hodnoty odporové řady

$$R_1, R_2, R_3, R_4, \ldots = \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \frac{34}{21}, \ldots$$

Tato čísla nám zajisté něco připomínají. Ve zlomcích jsou obsažena čísla Fibonacciho posloupnosti. Dokonce v každém zlomku je podíl dvou po sobě jdoucích čísel Fibonacciho posloupnosti. A víme, že posloupnost tvořená podíly po sobě jdoucích Fibonacciho čísel konverguje ke známé hodnotě, tzv. zlatému řezu φ. V našem případě sice vybíráme pouze každý druhý člen z posloupnosti podílů, to ale na hodnotě, ke které řada konverguje nic nemění. Celkový odpor tedy je

$$R_{\mathrm{celk}} = \varphi R = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R \approx 1{,}62 R \,.$$

28. *hustoměr*

Představme si pružinu o tuhosti k. Když na takovou pružinu zavěsíme závaží, prodlouží se na délku x_0. Když ale závaží ponoříme do kapaliny, prodlouží se pružina na délku x různou od x_0. Lze určit hustotu kapaliny, do níž je závaží ponořené? A v případě že ne, proč?

Pružina působí na závaží v prvním případě silou kx_0, na ponořené závaží silou kx. V obou případech platí rovnováha sil, na neponořené závaží působí proti pružině tíhová síla velikosti mg, tedy $kx_0 = mg$. Na ponořené závaží působí navíc ještě vztlak, pro rovnováhu dostáváme $kx = mg - V\varrho g$, kde V jest objem závaží a ϱ hustota, pro niž dostáváme z obou rovnic rovnováhy sil

$$\varrho = \frac{k}{Vg} \left(x_0 - x \right) \,,$$

tudíž je nutné k určení hustoty znáti objem závaží, který je zde nezávislým parametrem.

29. *hrátky s kondenzátorem*

Mějme deskový kondenzátor odpojený od zdroje a nabitý na napětí $U = 10\,\mathrm{V}$, jehož čtvercové desky mají plochu $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ a jsou od sebe ve vzdálenosti $d = 2\,\mathrm{mm}$. Přesně doprostřed mezi desky kondenzátoru vsuneme čtvercový měděný plech plochy S a tloušťky $b = 1\,\mathrm{mm}$. Jak velká práce je vykonána při zasunutí měděného plechu do kondenzátoru? Klade plech odpor při zasouvání nebo naopak sám dovnitř chce? Jak se změní kapacita kondenzátoru? Uvažujte, že vzdálenost desek je velmi malá oproti ploše kondenzátoru.

Vsunutím měděného plechu vlastně vytvoříme dva nové kondenzátory se vzdáleností desek $d' = d/4$. Kapacita každého z nových kondenzátorů je proto $C' = 4C$. Sériovým spojením dvou kapacit C' dostaneme finální kapacitu $C_{\mathrm{f}} = C'/2 = 2C$. Nezáleží na tom, zda plech vsuneme přímo doprostřed, nebo ho přiložíme k jedné z desek. Uvážíme–li přiložení k desce, nová kapacita je zřejmá ihned.

Na deskách původního kondenzátoru je náboj Q a $-Q$, což se nemění. Na stranách vsunutého plechu se rovněž naindukuje náboj Q a $-Q$, protože náboje v plechu se uspořádají tak, aby v kovu vymizelo elektrické pole.

Energie kondenzátoru je dána vztahem $E = Q^2/2C$. Výsledná energie E_f kondenzátoru s plechem uvnitř je dána součtem energií dvou vzniklých kondenzátorů, tedy $E_\mathrm{f} = Q^2/2C' + Q^2/2C' = E/2$ Energie soustavy po zasunutí plechu klesla, plech byl tedy vtahován dovnitř. Původní kapacita kondenzátoru je dána vztahem $C = \varepsilon_0 S/d$, dosazením zadaných hodnot $C = 44\,\mathrm{pF}$. Původní energie je $E = CU^2/2$ polovina z této energie rovná vykonané práci je číselně $W = 1{,}1\,\mathrm{nJ}$. To není mnoho, že.

30. *supravodivý oscilátor*

Smyčka ze supravodivého drátu ve tvaru čtverce o straně a o celkové hmotnosti m, kterou dokola obíhá stálý proud I se volně vznáší v prostoru s homogenním magnetickým polem B, kolmým na rovinu čtverce. Smyčku mírně natočíme okolo osy procházející středy dvou protilehlých stran čtverce a uvolníme. Jaká bude perioda kmitající smyčky?

Protože teče cívkou proud, tak okolní magnetické pole se snaží srovnat magnetický moment cívky do svého směru. Působí naň momentem $M = BIS\sin\varphi = J\ddot{\varphi}$ (pro malé výchylky se dá použít aproximace $\sin\varphi \approx \varphi$). Tudíž dostáváme

$$\ddot{\varphi} + \frac{BIS}{J}\varphi = 0\,.$$

A protože je čtverec dosti symetrické těleso, tak je moment setrvačnosti vůči všem osám stejný a roven

$$J = \frac{1}{6}ma^2 \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{6IB}}\,.$$

31. *topič Karel*

Jak rychle musí házet lopatou topič Karel na parní lokomotivě? Vlak o hmotnosti $M = 10000\,\mathrm{t}$ zrychluje nejvyšším možným zrychlením z počáteční rychlosti $v = 10\,\mathrm{m/s}$. Součinitel klidového tření mezi kolejí a kolem je $f = 0.1$. Drážní uhlí má výhřevnost $c = 30\,\mathrm{MJ/kg}$. Na lopatu se dá nabrat až $m = 10\,\mathrm{kg}$ paliva a účinnost kotle je $\eta = 50\,\%$.

K trvalému zrychlování je potřeba výkon. V tomto případě se jedná o výkon třecích sil. Zrychlení vlaku určíme $a = fg$. Třecí síla se potom rovná $F = Mfg$, které odpovídá výkon $P = mfgv$. Jaký výkon dodává Karlík? Je úměrný frekvenci přikládání ν a není problém doplnit konstanty úměrnosti $P = \eta mc\nu$. Teď už určíme

$$\nu = \frac{Mfgv}{\eta mc} = 0{,}6\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

No teda Karle, to abys zase makal na benchi.

32. *kosmické obžerství*

V meziplanetárním prostoru se vyskytuje nehybný prach s hustotou $\varrho = 1 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{kg/m^3}$. O kolik se v důsledku jeho nabalování na pohybující se Zemi změní poloměr zemské orbity kolem Slunce během jednoho roku? (Vliv zemské atmosféry a gravitace na prach zanedbejte a zjednodušte si práci využitím $(1 + x)^y \approx 1 + xy$ pro $x \ll 1$.)

Za jeden rok opíše průřez Země objem přibližně $\Delta V = 2\pi R \cdot S$, kde $R = 1\,\mathrm{AU}$ je vzdálenost Země a Slunce a S je průřez Země. Hmotnost nachytaná na planetu je tudíž $\Delta m = 2\pi^2 \varrho R r_{\mathrm{Z}}^2$, kde r_{Z} je poloměr Země. Při pohybu platí zákon zachování energie a momentu hybnosti,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM}{R}(m + \Delta m) = \frac{1}{2}(m + \Delta m)\tilde{v}^2 - \frac{GM}{R + \Delta R}(m + \Delta m)\,,$$
$$mvR = (m + \Delta m)\tilde{v}(R + \Delta R).$$

(m je hmotnost Země, M hmotnost Slunce) Z druhé rovnice vyčíslíme novou rychlost $\tilde{v}$ a dosadíme do první,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM}{R}(m + \Delta m) = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m + \Delta m}\frac{R^2}{(R + \Delta R)^2} - \frac{GM}{R + \Delta R}(m + \Delta m)\,.$$

Protože očekáváme, že relativní změny parametrů trajektorie jsou během roku velmi malé, můžeme využít přibližný vzorec $(1+x)^y \approx 1 + xy$ pro $x \ll 1$ a výrazy ve jmenovatelích převést do čitatelů. Když se provede úprava vzniklé rovnice, vyjde

$$\Delta R = \frac{\varrho\pi^2 r_z^2 R^2}{m}\frac{1}{\frac{GM}{Rv^2} - 1} \doteq -17\,\mu\mathrm{m}\,.$$

(Za rychlost Země jsme dosadili 30 km/s.) Dráha se zjevně prakticky nezmění (díkybohu pro nás…).

33. *optikova otázka*

Oko konkrétního člověka je schopné dokonale akomodovat na vzdálenost 15 cm *až* 90 cm. *Je možné tomuto člověku pořídit brýle na dálku, se kterými bude zároveň schopný číst? Vysvětlete. Standardní vzdálenost textu od oka při čtení je* 25 cm.

Když oko není akomodované, zaostří na vzdálenost $a = 90\,\mathrm{cm}$, tomu říkáme vzdálený bod. Neakomodovanému oku odpovídá ohnisková vzdálenost f a vzdálený bod se zobrazí na sítnici, čemuž odpovídá obrazová vzdálenost a'. Pro naše potřeby můžeme použít zobrazovací rovnici, která říká

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}\,.$$

Přiložením čočky (brýlí) ohniskové dálky g těsně před oko se optické mohutnosti sčítají, pro výslednou ohniskovou dálku h platí $1/h = 1/f + 1/g$. Nyní hledáme takovou mohutnost brýlí, aby se vzdáleným bodem stala vzdálenost $b = \infty$.

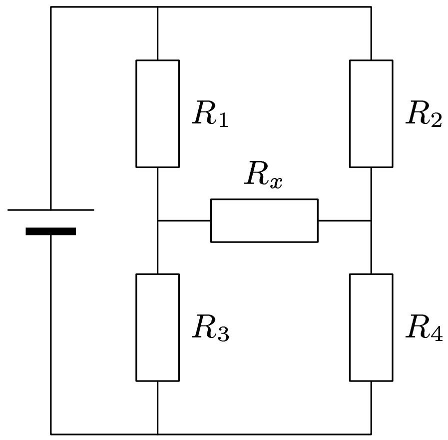
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} + \frac{1}{g}\,,$$

odkud plyne $1/g = 1/b - 1/a = -1/a = -1{,}11\,\mathrm{D}$

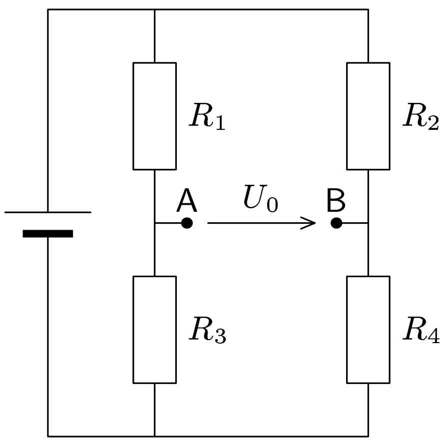
Podobná rovnice by měla platit i pro blízký bod oka, postup jejího odvození by totiž byl identický. Proto z posledního vztahu vyjádřeme b, které bude nyní hrát roli blízkého bodu oka s brýlemi, přičemž a bude nyní oněch 15 cm. Dostáváme $b = 18cm$, což je méně než 25 cm a s brýlemi bude možné normálně číst.

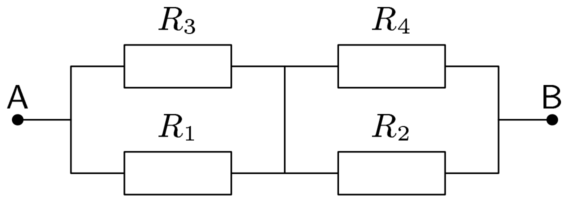
34. *jak si zatopit*

Určete velikost odporu R_x tak, aby jemu dodávaný výkon byl co největší. Velikosti odporů jsou $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 4R$, napájecí napětí je U.



Abychom vyřešili, jaký výkon může být do odporu R_x dodáván, musíme si celý obvod nejprve zjednodušit. Jedná se o lineární obvod a pro zjednodušení takovéhoto obvodu se nám nabízí použití Theveninova teorému. Ten nám říká, že libovolně složitý lineární obvod můžeme vůči libovolným svorkám zjednodušit na zapojení skutečného zdroje napětí k těmto svorkám[2]. Takový skutečný zdroj napětí je složen z ideálního zdroje napětí o velikosti U_0 a k němu sériově řazenému vnitřnímu odporu R_i. Napětí ideálního zdroje v náhradním zapojení určíme jako napětí mezi výstupními svorkami naprázdno, tj. bez zátěže. Vnitřní odpor zapojení pak určíme jako odpor mezi výstupními svorkami, když vyřadíme všechny zdroje. Napěťové zdroje vyřadíme tak, že je zkratujeme, proudové zdroje odpojíme od obvodu.





Při výpočtu napětí U_0 budeme předpokládat orientaci ve směru svorek $\mathsf{A} \rightarrow \mathsf{B}$ ($U_0 = U_{\mathsf{AB}}$). Druhý Kirchhoffův zákon nám říká, že součet napětí ve smyčce je nulový. Označme si tedy napětí na rezistorech R_3 a R_4 hodnotami U_{R_3} a U_{R_4}. Pak pro hodnotu U_{AB} platí

$$U_{\mathsf{A}B} = U_{R_3} - U_{R_4}\,.$$

Podíváme-li se pozorně na obrázek výše, pak vidíme že napětí U_{R_3} a U_{R_4} jsou vlastně výstupní napětí napěťových děličů bez zátěže při napájení napětím U. Tyto děliče se nyní navzájem

2) Druhou alternativou je Nortonův teorém, který k nahrazení obvodu používá skutečného zdroje proudu, tedy ideálního zdroje proudu a k němu paralelně řazeného vnitřního odporu. Obě možnosti jsou ekvivalentní a navzájem převeditelné.

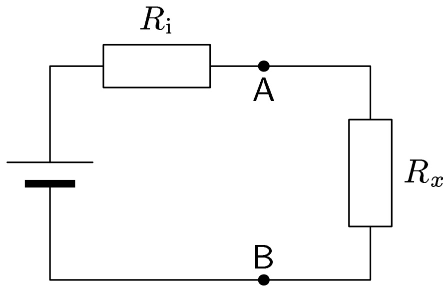
vůbec neovlivňují. Určíme výstupní napětí obou děličů a vypočítáme hodnotu $U_0 = U_{AB}$.

$$U_{R_3} = U \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3} = U \cdot \frac{3}{4}, U_{R_4} = U \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4} = U \cdot \frac{2}{3},$$
$$U_0 = U_{AB} = U \cdot \frac{3}{4} - U \cdot \frac{2}{3} = \frac{U}{12}.$$

Ještě nám zbývá vypočítat vnitřní odpor R_i. Z obrázku výše vidíme, že se jedná o jednoduchou sérioparalelní kombinaci odporů.

$$R_\mathrm{i} = R_1 \| R_3 + R_2 \| R_4 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}, + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{25}{12} \cdot R.$$

Všechny potřebné hodnoty pro použití Theveninova teorému máme již určeny. Podle Thevenina si tedy původní obvod převedeme do zjednodušeného tvaru jako je na obrázku. Výkon, jaký do obvodu dodá zdroj napětí je spotřebováván jak zátěží R_x, tak se i ztrácí na vnitřním odporu R_i. Výkon zdroje je $P_0 = U_0 \cdot I$, ztráty na vnitřním odporu jsou $P_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} \cdot I^2$ a výkon dodávaný do zátěže je P. Pro výkony platí



$$P = P_0 - P_i = U_0 I - R_i I^2.$$

Jak vidíme z předchozí rovnice, je výkon P dodávaný do zátěže funkcí proudu I protékajícího obvodem. Naším cílem je najít maximum této funkce. Znalejší vědí, že se k tomuto účelu dá použít derivace funkce. My se ale obejdeme i bez ní, protože vidíme, že se jedná o kvadratickou funkci proudu I, jejíž vrchol není problém najít, tabulky nám k tomu pomohou.

$$I = \frac{U_0}{2R_\mathrm{i}}.$$

Ještě určíme vztah pro proud v obvodu a porovnáme s vypočtenou hodnotou proudu, kdy je výkon v zátěži největší. Výsledkem bude hledaná velikost zátěže R_x.

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_x} = \frac{U_0}{2R_i}$$
$$R_x = R_i = \frac{25}{12} R.$$

Vypočítali jsme, že velikost odporu musí být $R_x = 25R/12$. Při výpočtu jsme také zjistili, že pokud chceme do zátěže dodávat největší výkon, musí její velikost být stejná, jako vnitřní odpor celého zapojení. Provedli jsme tzv. výkonové přizpůsobení obvodu.

35. *letící zrcadlo*

Světelné záření frekvence f dopadá pod úhlem α na zrcadlo, pohybující se relativistickou rychlostí v (kolmo k rovině zrcadla). Najděte vztah mezi úhlem dopadu a odrazu.

Řešila-li by se tato úloha klasicky, tak se bude úhel odrazu rovnat úhlu dopadu, ale pokud se bude zrcadlo pohybovat vyšší rychlostí, úhel dopadu a odrazu již nebude stejný.

Označíme $(x_\mathrm{z}, y_\mathrm{z})$ polohu zdroje, $(x_\mathrm{d}, y_\mathrm{d})$ polohu detektoru. Tyto polohy mohu transformovat pomocí Lorenzovy transformace do soustavy spojené se zrcadlem. V této soustavě bude již platit zákon odrazu, tedy úhel dopadu a odrazu se sobě rovnají resp.

$$\frac{y'_\mathrm{z}}{x'_\mathrm{z}} = \frac{y'_\mathrm{d}}{x'_\mathrm{d}}\,.$$

Ve volbě polohy zdroje i detektoru je jeden volný stupeň volnosti proto můžeme položit $x_\mathrm{d} = x_\mathrm{z}$. Protože se soustava pohybuje rychlostí v ve směru y bude platit $y' = \gamma(y - vt)$, $x' = x$. Toto lze dosadit do zákona odrazu a vyjde

$$\frac{y_\mathrm{z} - vt_1}{x_\mathrm{z}} = \frac{y_\mathrm{d} - vt_2}{x_\mathrm{d}}\,. \tag{2}$$

Nyní můžeme začít měřit čas v okamžiku, kdy paprsek vyjde ze zdroje a za čas t_2 dosadíme čas kdy paprsek dosáhne detektoru, tedy

$$t_1 = 0\,, \quad t_2 = \frac{\sqrt{x_z^2 + y_z^2} + \sqrt{x_d^2 + y_d^2}}{c}\,,$$

pokud se paprsek odrazí od zrcadla v bodě $[0, 0]$, což se dá zajistit vhodnou volbou souřadnic. Uvážíme-li, že $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{y}{x}$ tak po vydělení x_d a s využitím rovností

$$\sqrt{1 + cotg^2 A} = \sqrt{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A}} = \frac{1}{\sin A}$$

nám vyjde ze vztahu ??

$$\operatorname{cotg}\beta - \frac{v/c}{\sin\beta} = \operatorname{cotg}\alpha + \frac{v/c}{\sin\alpha}\,.$$

36. *kyvadlo na kolejích*

Kyvadlo se skládá z nehmotné tyčky délky l, na jejímž jednom konci se nachází závaží o hmotnosti m, a druhým koncem je připevněné k závaží o hmotnosti M, které volně (bez tření) klouže po vodorovné kolejnici. Tyčka se závažím m se může volně otáčet okolo bodu úchytu (závaží M na kolejnici) ve svislé rovině obsahující kolejnici a celý systém se nachází v gravitačním poli se zrychlením g. Na začátku kyvadlo nastavíme do svislé polohy, se závažím m přímo nad M (tato poloha je tedy rovnovážná, ale nestabilní) a mírně strčíme do jeho horního konce. Jak daleko od počáteční polohy M dopadne na kolejnici druhý konec kyvadla?

Protože na soustavu nepůsobí ve vodorovném směru žádné síly tak se nezmění poloha těžiště. Tedy označíme-li x hledanou vzdálenost, tak musí platit $xm + (x - l)M = 0$, z čehož již plyne $Ml/(M + m)$.

37. *Maelstrom v zimě*

Kýbl je plný vody a celý (i s vodou) se otáčí úhlovou rychlostí Ω okolo svislé osy procházející jeho těžištěm, když v tom se náhle sníží teplota tak hluboko pod nulu (0 °C), že všechna voda okamžitě zmrzne, zachovávajíce si svůj původní tvar. Jaká bude perioda malých oscilací malé kuličky o hmotnosti m, která náhodou spadla do kýblu se zmrzlou vodou a bez tření klouže okolo středu? Kuličku považujte za hmotný bod.

Hladina vody je vždy kolmá k zrychlení.[3] Celkové zrychlení je rovno (vektorovému) součtu tíhového g a odstředivého $\Omega^2 x$, kde x je vzdálenost od středu. Směrnice křivky ledu v daném místě je tedy $\operatorname{tg} \alpha = \Omega^2 x/g \approx \alpha$. Na kuličku, která bude potom ve stejném místě, bude působit pouze gravitační síla. Tečná složka této síly je $F = -mg\alpha = m\Omega^2 x$. Porovnáním s rovnicí pro kuličku na pružince vidíme, že $k = m\Omega^2$, a perioda je tedy $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi/\Omega$.

38. *bác!*

Spolu letící pozitron a elektron, každý o energii E, anihilují na 2 kvanta γ. Jakou maximální energii může mít anihilační kvantum γ v laboratorní soustavě? Klidová energie elektronu je $m_e c^2$ a $pc = \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}$ je relativistická hybnost částice s klidovou hmotností m_0.

K emisi fotonu o maximální energii dojde, když anihilační fotony vyletí ve směru rovnoběžném s původní trajektorií elektronu s pozitronem. Foton s maximální energií bude ten letící po směru původních částic.

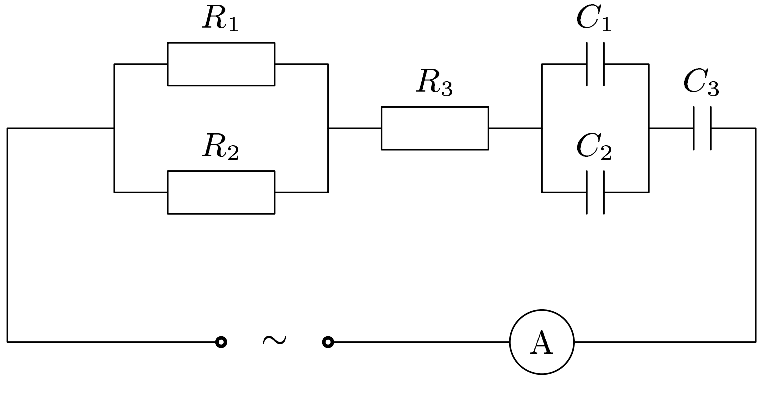
Energii prvního (resp. druhého) fotonu označme E_1 (resp. E_2) a prohlasme ho energetičtějším. Potom tedy ze zákonů zachování energie a hybnosti plyne

$$E_1 + E_2 = 2E \qquad p_1 - p_2 = 2p\,,$$

kde p_i jsou odpovídající hybnosti. Dvojky se na pravé straně nachází proto, že sčítáme energie a hybnosti pozitronu a elektronu, což jsou stejně hmotné částice. Rozšíříme druhou rovnici c a využijeme vzorce ze zadání a zjistíme, že pro foton ($m_0 = 0$) platí, že $E = pc$. S tímto poznatkem už není problém dopočítat řešení soustavy lineárních rovnic s výsledkem $E_1 = E + pc = E + \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}$.

39. *RC obvod*

Jakou hodnotu efektivního proudu I_{ef} bude ukazovat ampérmetr, když je v obvodu zapojený zdroj střídavého napětí s efektivní hodnotou $U_{\mathrm{ef}} = 230\,\mathrm{V}$ a s kruhovou frekvencí $\omega = 50\,\mathrm{Hz}$. Dále víte, že $R_1 = 50\,\Omega$, $C_1 = 50\,\mathrm{pF}$, $R_2 = 100\,\Omega$, $C_2 = 100\,\mathrm{pF}$, $R_3 = 200\,\Omega$, $C_3 = 200\,\mathrm{pF}$.



[3] Jinak by voda lokálně nebyla v rovnováze.

Velikost efektivního proudu určíme z Ohmova zákona $I = U/R$, kde Z je impedance. Rezistory v našem zapojení můžeme nahradit jedním rezistorem o odporu

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3\,.$$

Stejně tak můžeme nahradit kondenzátory jedním kondenzátorem s kapacitou

$$C = \frac{(C_1 + C_2)\,C_3}{C_1 + C_2 + C_3}\,.$$

Celková velikost impedance v sériovém RC obvodu je

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\,.$$

Tedy ampérmetr naměří efektivní proud o velikosti

$$I = \frac{U}{Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}\,,$$

po dosazení zadaných hodnot $I = 943\,\mathrm{nA}$.

40. *vesmírný kulečník*

Představme si, že náš nejbližší vesmírný soused, Měsíc, se náhle jakýmsi nešťastným řízením osudu zastaví na své oběžné dráze. V tu chvíli začne padat na Zemi. Spočtěte, kolik času mají pozemšťané k dobru, než Měsíc dopadne na povrch zemský.

Protože jde o pohyb v centrálním gravitačním poli, tak platí Keplerovy zákony. V tomto případě je nejlépe využít 3. Tento zákon dává do souvislosti velikost hlavní poloosy a dobu oběhu. $\frac{T^2}{a^3} = konst.$

Označme T_0 dobu oběhu měsíce kolem země a r střední vzdálenost. Pokud Měsíc normálně obíhá zemi tak $a_\mathrm{r} = r$ oběžná doba je T_0, pokud se měsíc zastaví, tak jde v podstatě o pohyb po eliptické trajektorie, která limitně přechází do pohybu po přímce. Doba pádu je rovna polovině teto periody oběhu, v tomto případě je délka hlavní poloosy $a_\mathrm{p} = r/2$, dobu pádu označíme T_p, což je polovina doby oběhu. Dosazením do třetího Keplerova zákona dostáváme

$$\frac{T_0^2}{a_\mathrm{r}^3} = \frac{(2T_\mathrm{p})^2}{a_\mathrm{p}^3}\,,$$

po dosazení za a dostaneme

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{(2T_p)^2}{(r/2)^3}\,,$$

po vynásobení r^3, $T^2 = 32T_\mathrm{p}^2$ neboli

$$T_\mathrm{p} = \frac{\sqrt{2}}{8} T_0 = 4\,\mathrm{dny}\;22\,\mathrm{hod}\;48\,\mathrm{min}\,.$$

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.